# Ejercicios para preparar el examen de probabilidad

**Fecha de examen: lunes 21 de agosto del 2023**

**Instrucciones**: Los siguientes ejercicios son para preparar el examen de la parte de probabilidad del curso probabilidad aplicada de la LCD. No son para entregar y no tienen ningún peso en la evaluación. Tampoco vendrán necesariamente en el examen, sin embargo en el examen verán ejercicios muy similares. En el caso en el que no puedan resolver algún ejercicio pueden preguntar dudas siempre y cuando hayan hecho un intento serio por resolverlo.

### Comprensión de conceptos

1. ¿Qué significa que dos eventos A y B sean mutuamente excluyentes?
2. ¿Cuáles son las tres propiedades fundamentales de una probabilidad?
3. ¿Cómo se determina la probabilidad de cualquier evento $A \subset \Omega$ a partir de los elementos de los eventos en $\Omega$?
4. Para cualquier par de conjuntos $A$ y $B$, ¿cómo se define la probabilidad condicional de $A$ dado $B$? ($P(A|B)$)
5. Si los dos conjuntos son disjuntos, i.e. $A \cap B = \emptyset$. En palabras simples, ¿qué significa $P(A|B)$ en este caso?
6. ¿Cómo se obtiene la probabilidad total a partir de probabilidades parciales (es decir, condicionales)?
7. ¿Cuál es la regla de Bayes y para qué se utiliza?
8. ¿Qué significa que dos eventos A y B sean independientes?
9. ¿Qué es $P(A \cap B)$ cuando dos eventos $A$ y $B$ son (i) mutuamente excluyentes y (ii) independientes?
10. ¿Cómo interpretas una probabilidad?

### Manejo de teoría

1. Demuestra que para cualquiera dos conjuntos $A$ y $B$ en $\Omega$ se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. En una cierta empresa de investigación y desarrollo en ingeniería, aparte del personal de apoyo que consta de 25 empleados, todos los demás empleados son ingenieros, estadísticos o ambas cosas. El número total de empleados (incluido el personal de apoyo) es de 100. De estos, 50 son ingenieros y 40 son estadísticos; no se proporciona el número de empleados que son tanto ingenieros como estadísticos. Encuentra la probabilidad de que se elija al azar un empleado que no esté clasificado como ambos ingeniero y estadístico.

3. El espacio muestral para cierto experimento está dado por $\Omega = \{\omega : 0 < \omega < \infty\}$. Si la probabilidad para cualquier evento $A \subset \Omega$ se calcula vía
$$P(A) = \int_A e^{-x} \mathrm{d}x.$$
Y se tiene que $B = \{\omega : 4 < \omega < \infty\}$, encuentra $P(B)$, $P(B^c)$ y $P(B \cup B^c)$.

4. Para el experimento de lanzar dos dados, uno negro con puntos blancos, y el otro blanco con puntos negros, una vez y simultáneamente. Primero obtén $\Omega$, posteriormente y asignando igual probabilidad a cada uno de los eventos fundamentales, determina la probabilidad de los siguientes eventos:
   4.1. $A = \{n_B + n_W = 7\}$, es decir, la suma es 7;
   4.2. $B = \{n_B < n_W\}$;
   4.3. $B^*$, el complemento de B;
   4.4. $C = \{n_B = n_W\}$, es decir, los dos dados muestran el mismo número;
   4.5. $D = \{n_B + n_W = 5 \text{ o } 9\}$.

5. Seis eventos simples, con probabilidades $P(E_1) = 0.11$, $P(E_2) = P(E_5) = 0.20$, $P(E_3) = 0.25$, $P(E_4) = 0.09$, $P(E_6) = 0.15$, constituyen el conjunto completo de resultados de un experimento. Los siguientes eventos son de interés:
$$A = \{E_1, E_2\}, \quad B = \{E_2, E_3, E_4\}, \quad C = \{E_5, E_6\}, \quad D = \{E_1, E_2, E_5\}.$$
Determina las siguientes probabilidades:
   5.1. $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$.
   5.2. $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$; $P(A \cup D)$, $P(A \cap D)$; $P(B \cup C)$, $P(B \cap C)$.
   5.3. $P(B|A)$, $P(A|B)$; $P(B|C)$, $P(D|C)$.

   ¿Cuáles de los eventos A, B, C y D son mutuamente excluyentes?

6. Suponiendo que dar a luz a un niño o a una niña tiene la misma probabilidad, y además, que no ha ocurrido ningún parto múltiple, primero determinemos la probabilidad de que una familia tenga tres niños seguidos. Ahora consideremos la conjetura (basada en datos empíricos) de que, para una familia que ya ha tenido dos niños seguidos, la probabilidad de tener un tercer niño es 0.8. Bajo estas condiciones, ¿cuál es ahora la probabilidad de que una familia tenga tres niños seguidos?

7. Muestra que si dos eventos $A$ y $B$ son independientes, entonces los eventos $A^c$ y $B^c$ también son independientes

8. Un sistema compuesto por dos componentes $A$ y $B$, que están conectados
   8.1. En serie, funciona sólo si ambos funcionan.
   8.2. En paralelo, el sistema falla solo si ambos componentes fallan.

   Si $P(A)$, la probabilidad de que el componente $A$ funcione, es 0.99, y la probabilidad de que el componente $B$ funcione es 0.90, encuentra la probabilidad de que el sistema funcione en ambos casos. En ambos casos asume que hay independencia. ¿Cuál probabilidad es más alta y por qué es razonable esperar una probabilidad más alta del sistema en cuestión?