Métodos estadísticos

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios

De probabilidad a estadística

División

Introducción y motivación

Carlos E. Rodríguez

Departamento de Probabilidad y Estadística, IIMAS-UNAM

27 de enero de 2025

Fenómeno determinista

Un **fenómeno determinista** es aquel en el que, dado un conjunto completo de condiciones iniciales y las leyes que rigen el sistema, el resultado es **completamente predecible** y se repite de forma idéntica bajo las mismas circunstancias.

Características:

- Existe una relación **causa-efecto exacta**.
- El comportamiento se describe mediante **ecuaciones matemáticas precisas**.
- No hay **incertidumbre inherente**.
- Si las condiciones iniciales son idénticas, el resultado siempre es el mismo.

Ejemplos de fenómenos deterministas

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Ejemplo 1: Movimiento de un proyectil

- Dados:
  - Velocidad inicial (v_0),
  - Ángulo de lanzamiento (θ),
  - Aceleración gravitacional (g),
- Podemos calcular con precisión:
  - La trayectoria del proyectil,
  - La altura máxima alcanzada,
  - La distancia recorrida.

Ejemplo 2: Órbitas planetarias

- Usando las leyes de Newton, podemos predecir:
  - La posición exacta de un planeta en su órbita en cualquier momento.
  - Los tiempos de eclipses o alineaciones.

Fenómeno aleatorio

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Un **fenómeno aleatorio** es cualquier situación, proceso o evento cuyo resultado no puede predecirse con certeza debido a la presencia de **incertidumbre**, **variabilidad** o **factores fuera de nuestro control**.

Características:

- **Incertidumbre individual:** No es posible predecir el resultado exacto de una observación específica.
- **Cuantificación con probabilidad:** Se usan herramientas probabilísticas para describir y analizar la variabilidad.
- **Dependencia de factores complejos:** Puede involucrar múltiples variables difíciles de medir o modelar.

Ejemplos de fenómenos aleatorios

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Ejemplo 1: Lanzamiento de una moneda

- No podemos predecir si obtendremos "sol" o "águila" en un lanzamiento individual.
- Sin embargo, al lanzar la moneda muchas veces, podemos calcular:
  - La probabilidad de "sol" ($P(\text{sol}) = 0.5$).
  - La proporción de resultados esperados a largo plazo.

Ejemplo 2: Tiempo de espera en una fila

- No sabemos cuánto tardará en ser atendida una persona específica.
- Podemos estimar un tiempo promedio basado en observaciones pasadas.
- Factores como el número de clientes y la velocidad de servicio afectan la variabilidad.

Estudiando fenómenos aleatorios

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Para estudiar el comportamiento de un fenómeno aleatorio (FA), debemos...

1. Recolectar información $x_1, x_2, \ldots, x_n$ acerca de FA.
2. Nos enfocamos en analizar el comportamiento **agregado** de toda la información $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es imposible encontrar patrones si analizamos observaciones individuales x_i.
3. Usaremos la teoría de variables aleatorias del curso de probabilidad.
    1. El comportamiento agregado de una variable aleatoria Y se describe mediante $f(y|\theta)$.
    2. Usando $f(y|\theta)$, podemos calcular probabilidades para analizar y predecir el comportamiento de Y.
    3. ¿Cómo hacemos la conexión entre variables aleatorias y FA?

Proceso de la inferencia estadística (1 de 2)

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

En inferencia estadística siempre asumiremos

1. Un modelo de probabilidad, i.e. una cierta v.a. X tiene la capacidad de describir el $\texttt{FA}$ que nos interesa conocer. Por ejemplo,

$$\texttt{FA} = \{\text{salario mensual de los científicos de datos}\},$$

   podemos asumir que $\texttt{FA} \equiv X \sim \text{Gamma}(x|\alpha, \beta)$.
2. No conocemos (α, β) y sólo disponemos de un conjunto finito de datos $x_{1:n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, i.e. el salario mensual de algunos egresados de la LCD.
3. La inferencia estadística nos brinda herramientas para que

$$x_{1:n} \xrightarrow{\text{modelo para } \texttt{FA} + \text{ modelo de recolección}} (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

Proceso de la inferencia estadística (2 de 2)

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Obviamente, es necesario cuantificar la incertidumbre en nuestras estimaciones

4. Tenemos sólo una muestra $x_{1:n}$ de TODA la información que puede producir el `FA`. Es imprescindible considerar la incertidumbre que esto conlleva.
   - ¿Cómo se obtuvo la muestra?
   - ¿Qué tanto impacta la cantidad de información que tenemos?
5. ¿Cuáles son las propiedades probabilísticas de nuestras estimaciones?
6. ¿El modelo de probabilidad que se asumió para describir `FA` fue adecuado?

En resumen

El problema que enfrenta la inferencia estadística es el de estudiar un FA de interés usando sólo un conjunto finito de información.

1. Suponemos que $X \sim f(x|\theta)$ describe de forma adecuada a el FA.
2. Usamos la información $x_{1:n}$ para construir una estimación $\widehat{\theta}$ de θ.
3. Es necesario considerar la incertidumbre que esto implica, así que analizamos el comportamiento probabilistico del estimador $\widehat{\theta}$, i.e. visto como variable aleatoria.
4. La estadística también nos da herramientas para determinar si nuestros supuestos fundamentales son válidos.

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

División de la estadística

Carlos E. Rodríguez

Fenómenos aleatorios
De probabilidad a estadística
División

Es una práctica común dividir a la estadística en dos categorías:

1. Estadística descriptiva. Su objetivo es resumir y organizar la información presente en los datos.
2. Inferencia estadística. Su objetivo es obtener conclusiones acerca de un `FA` de interés a partir de la información en una muestra.
   - Paramétrica, $X \sim f(x|\theta)$.
   - No paramétrica, $X \sim F(x)$.