

Ejercicios para preparar el 2^{do} examen de métodos estadísticos

Guía para el examen de la parte de “Conceptos preliminares de inferencia estadística paramétrica”.

1. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable $X \sim \text{Pois}(x|\lambda)$, i.e.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Encuentra el estimador por el método de momentos y por el método de máxima verosimilitud para el parámetro λ .
 - (b) Encuentra la media y varianza del EMV para λ .
 - (c) Asumiendo normalidad asintótica del EMV para λ , escribe el intervalo de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\%$ para λ .
 - (d) Encuentra el EMV de $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$.
 - (e) ¿Es posible encontrar una expresión analítica para un intervalo de confianza asintótico del $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\tau(\lambda)$?
2. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una m.a. de $X \sim \text{Bernoulli}(x|\theta)$, sabemos que el EMV de θ está dado por $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$. Asumiendo normalidad asintótica del EMV, encuentra una expresión para determinar el tamaño de muestra n , que necesitamos para asegurar que

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \epsilon) = 1 - \alpha,$$

en donde ϵ (margen de error) y α (que determina el nivel de confianza) se fijan de acuerdo a los intereses del estudio.

3. Considera $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $X \sim \text{Bin}(x|m, \theta)$, i.e.

$$P(X = k) = \binom{m}{k} \theta^k (1 - \theta)^{m-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n$$

- (a) Encuentra el estimador de θ utilizando el método de momentos.
- (b) Encuentra el EMV para θ .

- (c) Determina la media y varianza del EMV de θ .
 - (d) Construye el intervalo de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\%$ para θ asumiendo normalidad asintótica.
4. Considera un cargamento de $N = 1,000$ cajas de huevo: cada caja contiene $m = 30$ huevos. Define X_i como el número de huevos rotos o en mal estado para $i = 1, \dots, N$. Supongamos que en una m.a. de $n = 10$ cajas de huevo se observa que aprox. hay 3 huevos rotos o en mal estado en cada caja. Construye un intervalo del 95% de confianza para el número total de huevos rotos o en mal estado en el cargamento de $N = 1,000$ cajas de huevo. *Hint. Usa la pregunta anterior....1) interpreta θ y 2) considera que $N\theta$ debe ser el número total de huevos rotos o en mal estado en el cargamento de N cajas de huevo.*
5. Identifica claramente los supuestos que se hicieron en la pregunta anterior.
- (a) ¿Cómo obtienes una m.a. de una población finita de N elementos?
 - (b) ¿Qué supuesto estaríamos poniendo sobre θ y su relación con las N cajas de huevo? Si cada caja de huevo se llena con huevos de distintas granjas, ¿el supuesto sobre θ sería válido?
6. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una m.a. de una $X \sim \text{Gamma}(x|\alpha, \beta)$,

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \text{para } x > 0, \alpha > 0, \text{ y } \beta > 0.$$

- (a) Encuentra los estimadores de α y β utilizando el método de momentos.
 - (b) ¿Es posible encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para α y β ? (inténtalo y describe lo que sucede)
 - (c) Si asumes que α es conocido, ¿es posible encontrar el EMV $\hat{\beta}_n$ para β ? (obviamente quedaría en función de α).
7. Supongamos que $X_1, \dots, X_n$ forman una muestra aleatoria de una distribución uniforme con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{para } \theta \leq x \leq 2\theta, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Asumiendo que el valor de θ es desconocido ($\theta > 0$), determine el EMV de θ .

8. El modelo de RLS sin ordenada al origen está dado por

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Con $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ una m.a. de $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ y $x_1, \dots, x_n$ las observaciones que en este contexto se consideran como constantes conocidas.

- ¿Cómo se distribuye Y_i , para $i = 1, \dots, n$?
- Escribe la verosimilitud $L(\beta|y_1, \dots, y_n)$ y la log verosimilitud.
- Obtén el estimador máximo verosimil de β .
- ¿Es insesgado?

9. Para el primer problema asume ahora que se quiere resolver desde el enfoque Bayesiano, entonces asume una prior Gamma sobre λ , i.e.

$$p(\lambda|\alpha, \beta) = \text{Gamma}(\lambda|\alpha, \beta),$$

obten

- (a) La distribución posterior de λ .
 - (b) La esperanza posterior de λ .
 - (c) Un intervalo del $1 - \alpha$ de probabilidad para λ .
10. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de $N(\mu, \sigma^2)$ (con σ^2 conocida), asume una prior $p(\mu|\mu_0, \sigma_0^2) = N(\mu_0, \sigma_0^2)$ para μ y encuentra
- (a) La distribución posterior de μ .
 - (b) La esperanza posterior de μ .
 - (c) Un intervalo del $1 - \alpha$ de probabilidad para μ .