Modelos no paramétricos y de regresión/Estadística II | Semestre 2018-1

Segundo examen parcial

30 de octubre de 2017

Instrucciones: conteste correctamente los siguientes ejercicios. **Duración:** 2 horas.

1. Mostrar que

$$SC_{reg} = \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}_j^2 - n\bar{Y}^2.$$

2. Mostrar que $E(\hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{Y}$ y $V(\hat{\mathbf{Y}}) = \sigma^2 \mathbf{H}$.

3. Mostrar que $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_n$ y $V(\mathbf{e}) = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$.

4. Mostrar que en el modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, el estimador de mÃ¡xima verosimilitud de $\boldsymbol{\beta}$ se puede escribir como $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{I} - \mathbf{H})\boldsymbol{\epsilon}$.

5. Considere el modelo lineal con intercepto:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

Suponga que para cada observación i se multiplica la variable j por una constante λ_j con $\lambda_j > 0$ para toda $j = 0, \ldots, p$ y la variable respuesta se transforma multiplicando Y_i por una constante λ en cada observación i.

a) Demostrar que el estimador por M.C.O. de los parámetros β^* para esta nueva regresión es $\hat{\beta}^* = \lambda\Lambda^{-1}\hat{\beta}$ con Λ una matriz diagonal de $(p+1) \times (p+1)$ formada por los factores de escala λ_j

b) Demostrar que el residuo de la regresión transformada es $e^* = \lambda e$

6. Una institución desea estimar los gastos en alimentación de una familia Y en base a la información que proporcionan las variables X_1 = *ingresos mensuales* y X_2 = *número de miembros de la familia*. Para ello se recoge una muestra aleatoria simple de 15 familias. En la siguiente tabla se presentan las sumas de productos cruzados:

	y	x_0	x_1	x_2
y	5.80	8.10	32.1	29.0
x_0	8.10	15.0	42.0	55.0
x_1	32.1	42.0	188	141
x_2	29.0	55.0	141	219

Por último, se sabe que $SC_{error} = 0.0721$

a) Ajuste el modelo lineal correspondiente e interprete. (Estimar los parámetros $\underline{\beta}$ y σ^2).

b) Estime la varianza de $\boldsymbol{\beta}$

c) Calcule la tabla ANOVA asociada al modelo y realice la prueba de hipótesis correspondiente con un $\alpha = 0.05$.

d) Calcular intervalos de confianza simultáneos para los β_i con el método de Bonferroni. Usar $\alpha = 0.05$.

e) Calcule el R^2 y el R^2_{adj}. ¿Qué puede concluir?

f) Calcule el intervalo de confianza a la respuesta media (al 95 % de confianza) cuando $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$.

g) Calcule el intervalo de predicción (al 95 %) cuando $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$