Modelos no paramétricos y de regresión/Estadística II | Semestre 2018-1

Segundo examen parcial

30 de octubre de 2017

Instrucciones: conteste correctamente los siguientes ejercicios. **Duración:** 2 horas.

1. Mostrar que
$$SC_{reg} = \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2.$$

2. Mostrar que $E(\hat{\mathbf{Y}}) = E(\mathbf{Y})$ y $V(\hat{\mathbf{Y}}) = \sigma^2\mathbf{H}$.

3. Mostrar que en el modelo sin intercepto:

   a) $SCT = SCE + SCR$

   b) Bajo $H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$, demuestre:
   - $\frac{1}{\sigma^2}SCR \sim \chi^2_p$
   - $\frac{1}{\sigma^2}SCE \sim \chi^2_{n-p}$
   - $\frac{1}{\sigma^2}SCT \sim \chi^2_n$

   c) Bajo H_0, demuestre:
   - $\frac{1}{\sigma^2}SCR \perp \frac{1}{\sigma^2}SCE$

4. Considere el modelo lineal con intercepto:
$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$
Suponga que para cada observación i se multiplica la variable j por una constante λ_j con $\lambda_j > 0$ para toda $j = 0, \ldots, p$ y la variable respuesta se transforma multiplicando Y_i por una constante λ en cada observación i.

   a) Demostrar que el estimador por M.C.O. de los parámetros β^* para esta nueva regresión es $\hat{\beta}^* = \lambda\Lambda^{-1}\hat{\beta}$ con Λ una matriz diagonal de $(p+1) \times (p+1)$ formada por los factores de escala λ_j

   b) Demostrar que el residuo de la regresión transformada es $e^* = \lambda e$

5. Una institución desea estimar los gastos en alimentación de una familia Y en base a la información que proporcionan las variables X_1 = *ingresos mensuales* y X_2 = *número de miembros de la familia*. Para ello se recoge una muestra aleatoria simple de 15 familias. En la siguiente tabla se presentan las sumas de productos cruzados:

	y	x_0	x_1	x_2
y	5.80	8.10	32.1	29.0
x_0	8.10	15.0	42.0	55.0
x_1	32.1	42.0	188	141
x_2	29.0	55.0	141	219

Por último, se sabe que $SC_{error} = 0.0721$

   a) Ajuste el modelo lineal correspondiente e interprete. (Estimar los parámetros $\underline{\beta}$ y σ^2).

   b) Estime la varianza de $\boldsymbol{\beta}$

   c) Calcule la tabla ANOVA asociada al modelo y realice la prueba de hipótesis correspondiente con un $\alpha = 0.05$.

   d) Calcular intervalos de confianza simultáneos para los β_i con el método de Bonferroni. Usar $\alpha = 0.05$.

   e) Calcule el R^2 y el R^2_{adj}. ¿Qué puede concluir?

   f) Calcule el intervalo de confianza a la respuesta media (al 95 % de confianza) cuando $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$.

   g) Calcule el intervalo de predicción (al 95 %) cuando $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$