Modelos no paramétricos y de regresión | Estadística II

Tarea 5

Fecha de entrega: 16 de marzo

Prueba de Friedman

1. En el planteamiento de la prueba de Friedman con k tratamientos y n individuos, donde X_{ji} denota la medición del i-ésimo tratamiento del j-ésimo individuo. Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ji}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k} n(\bar{y}_{\bullet i}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n} k(\bar{y}_{j\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ji}-\bar{y}_{\bullet i}-\bar{y}_{j\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$$

2. En el planteamiento de la prueba de Friedman con k tratamientos y n individuos, donde R_{ji} es el rango de la medición del i-ésimo tratamiento calculado dentro del j-ésimo individuo.

   a) Calcular $E(R_{ji})$ y $V(R_{ji})$.

   b) Mostrar que

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\bar{R}_{\bullet i} - E(\bar{R}_{\bullet i})\right)^2}{V(\bar{R}_{\bullet i})} = \frac{12n}{(k+1)(k-1)} \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{R}_{\bullet i} - \frac{k+1}{2}\right)^2$$

   c) Mostrar que

$$F = \frac{SC_{reg}/(k-1)}{SC_{error}/(k-1)(n-1)} = (n-1)\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} R_{\bullet i}^2 - \frac{nk(k+1)^2}{4}}{\frac{nk(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} R_{\bullet i}^2}.$$

3. Un químico quiere probar el efecto de cuatro agentes químicos sobre la resistencia de un tipo particular de tela. Debido a que podría haber variabilidad de un rollo de tela a otro, el químico decide aplicar los cuatro agentes en cada rollo. Para el experimento, selecciona una muestra aleatoria de 5 rollos. A continuación se presentan las resistencias a la tensión resultantes.

Rollo	Agente 1	Agente 2	Agente 3	Agente 4
1	73.0	73.2	75.6	73.7
2	67.8	67.1	68.3	71.5
3	74.2	75.0	78.4	75.3
4	71.1	72.3	73.2	75.4
5	67.6	70.2	68.2	69.0

   Contrastar la hipótesis de igualdad en la distribución de la resistencia a la tensión bajo los distintos agentes químicos utilizando los estadísticos T y F. Utilizar $\alpha = 0.05$ y calcular el *p-value* de la prueba (con simulación).

4. Un ingeniero industrial está realizando un experimento sobre el tiempo de enfoque del ojo. Se interesa en el efecto de la distancia del objeto al ojo sobre el tiempo de enfoque. Cuatro distancias diferentes son de interés y cuenta con cinco individuos para el experimento. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Sujeto	4 ft	6 ft	8 ft	10 ft
1	9.7	7.0	6.2	5.9
2	6.5	6.2	3.2	4.3
3	6.3	6.1	3.5	4.5
4	6.9	1.0	2.1	2.1
5	6.2	6.6	5.8	3.5

Contrastar la hipótesos de igualdad en la distribución de la velocidad de enfoque del ojo bajo las distintas distancias utilizando los estadísticos T y F. Utilizar $\alpha = 0.05$ y calcular el *p-value* de la prueba (con simulación).

Medidas de asociación

5. La prueba de correlación de Spearman se utiliza para conocer el grado y el sentido de la relación que existe entre dos variables que se miden en un nivel ordinal cuando menos. La idea es contrastar las siguientes hipótesis:

   $H_0 : \rho = 0$ (las variables no están asociadas) vs. $H_1 : \rho \neq 0$ (existe correlación entre las variables)

   En clase se demostró que si no hay empates en las observaciones, entonces

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(R(X_i) - R(\bar{X}) \right) \left(R(Y_i) - R(\bar{Y}) \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(R(X_i) - R(\bar{X}) \right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(R(Y_i) - R(\bar{Y}) \right)^2}} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} \left(R(X_i) - R(Y_i) \right)^2}{n(n^2-1)}$$

   a) Calcular la esperanza del estadístico ρ.
   b) Calcular la varianza del estadístico ρ.
   c) Encontrar una regla de decisión para la prueba de hipótesis planteada.
   d) Encontrar el intervalo de confianza de ρ.

6. La prueba de correlación de Kendall tiene la misma utilidad que ρ de Spearman, la ventaja que tiene esta prueba sobre la otra es que puede ser generalizada a un coeficiente de correlación parcial. La idea es contrastar las siguientes hipótesis:

   $H_0 : \tau = 0$ (las variables no están asociadas) vs. $H_1 : \tau \neq 0$ (existe correlación entre las variables)

   En clase se vio que si no hay empates en las observaciones, entonces

$$\tau = \frac{2(\#\text{ de acuerdos} - \#\text{ de desacuerdos})}{n(n-1)}$$

   a) Calcular la esperanza del estadístico τ.
   b) Calcular la varianza del estadístico τ.
   c) Encontrar una regla de decisión para la prueba de hipótesis planteada.
   d) Encontrar el intervalo de confianza de τ.