Unidad 3. Probabilidad

Espacios de probabilidad

El modelo matemático para estudiar la probabilidad se conoce como *espacio de probabilidad* y tiene tres componentes:

1. *Espacio muestral* Ω: es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
2. *Familia de eventos* $\mathcal{A}$: es una familia de conjuntos que reune a todos los eventos de interés. $\mathcal{A}$ debe cumplir con las siguientes propiedades:
   - $\Omega \in \mathcal{A}$.
   - Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$.
   - Si $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.
3. *Medida de probabilidad* P: una función de $\mathcal{A}$ en $[0, 1]$, tal que a cada evento $E \in \mathcal{A}$ le asigna la su probabilidad $P(E)$.

Una familia de conjuntos que cumple con las tres propiedades anteriores se llama σ-álgebra de conjuntos de Ω.

Variables aleatorias

En algunos casos no es de interés estudiar las probabilidades de los resultados de los eventos, sino una función numérica de ellos, que nos permita operar con dichos resultados. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Considerar el lanzamiento de tres volados con monedas balanceadas, es decir, el resultado de cada volado puede ser águila (A) o sol (S) con igual probabilidad (0.5). El espacio muestral de este experimento es el siguiente

$$\Omega = \{AAA, \quad AAS, \quad ASA, \quad ASS, \quad SAA, \quad SAS, \quad SSA, \quad SSS\}$$

Una función de interés puede ser, $X(\omega) =$ *el número de águilas en* ω, donde ω es un elemento cualquiera del espacio muestral Ω. Entonces

$$\begin{aligned} X(AAA) &= 3 \\ X(AAS) = X(ASA) = X(SAA) &= 2 \\ X(ASS) = X(SAS) = X(SSA) &= 1 \\ X(SSS) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

En una urna hay 10 bolas idénticas numeradas del 1 al 5. Un experimento consiste en extraer 3 bolas al azar de de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que el menor de los números en las bolas extraídas sea mayor o igual a 2?
El espacio muestral del experimento es el siguiente:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{1,2,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,2,5\}, & \{1,3,4\}, & \{1,3,5\} \\ \{1,4,5\}, & \{2,3,4\}, & \{2,3,5\}, & \{2,4,5\}, & \{3,4,5\} \end{array} \right\}$$

Podemos definir la variable aleatoria X como $X(\omega) = \text{mín}\,\omega$. De modo que

$$\begin{aligned} & X(\{1,2,3\}) = X(\{1,2,4\}) = X(\{1,2,5\}) = 1 \\ & X(\{1,3,4\}) = X(\{1,3,5\}) = X(\{1,4,5\}) = 1 \\ & X(\{2,3,4\}) = X(\{2,3,5\}) = X(\{2,4,5\}) = 2 \\ & X(\{3,4,5\}) = 3 \end{aligned}$$

De esta forma la respuesta se obtiene calculando la probabilidad de que X sea mayor o igual a 2.

Variables aleatorias

Definiciones

- Una *variable aleatoria* (v.a.) X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es una función* que va del espacio muestral Ω al conjunto de números reales $\mathbb{R}$.
- El conjunto de posibles valores de una v.a. X se llama rango de X y se denota por $X(\Omega)$.
- Si $X(\Omega)$ es un conjunto *a lo más numerable*, se dice que X es una v.a. discreta.
- Si $X(\Omega)$ es un conjunto no numerable (generalmente un intervalo de números reales), se dice que X es una v. a. continua.

Para que una función de $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sea una variable aleatoria se debe cumplir que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R}.$$

Si una función que cumple con la propiedad anterior* se dice que es *medible*.
Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier* función, entonces $Y = g(X)(= g \circ X)$ es una v.a.

Función de distribución de una v.a.

Sea X es una v.a. discreta definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Sea $B \subset \mathbb{R}$, el conjunto de valores ω de Ω tales que $X(\omega) \in B$ se denotará como $\{X \in B\}$.
- Se denotará por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a la menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos abiertos (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$.

Definición

Se define la función de distribución de X como la función $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ tal que

$$P_X(B) = P(X \in B), \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Notación

Si X y Y son variables aleatorias se usa P_X y P_Y para representar a sus respectivas funciones de distribución.

Función masa de probabilidad de una v.a. discreta

Si X es una v.a. discreta, su función de distribución P_X está caracterizada por las probabilidades

$$P(X = x), \qquad \forall x \in X(\Omega)$$

ya que todo evento de la forma $\{X \in B\}$ se puede escribir de la forma $\bigcup_{x\in B}\{X = x\}$ y

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in B} P(X = x),$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición

Si X es una v.a. discreta definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define la *función masa de probabilidad* (f.m.p. o fmp)de X como la función $p_x : X(\Omega) \to [0, 1]$ tal que

$$p_X(x) = P(X = x), \qquad \forall x \in X(\Omega).$$

Notación

Si X y Y son variables aleatorias discretas, se usa p_X y p_Y para denotar a sus respectivas fmp. Cuando no haya riesgo de confusiones, se omitirá el subíndice.

Ejemplos

Ejemplo 1 (continuación)

La fmp de la variable aleatoria de la variable X que cuenta el número de águilas en tres volados se puede representar como sigue

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Ejemplo 2 (continuación)

La fmp de la variable aleatoria X que devuelve el mínimo número en las en las tres bolas extraídas se puede representar como sigue

x	1	2	3
$p(x)$	$3/5$	$3/10$	$1/10$

Propiedades de la fmp

- $0 \leq p(x) \leq 1, \qquad \forall x \in X(\Omega),$
- $\sum_{x \in X(\Omega)} p(x) = 1.$

Ejemplo 3

En una urna se tienen 10 bolas idénticas salvo el color, 4 verdes y 6 negras. Un experimento consiste en extraer al azar, tres bolas de la urna.

1. Describir el espacio muestral del experimento.
2. Dar una descripción de la v.a. X definida como $X(\omega) =$*número de bolas verdes en* ω.
3. Encontrar la fmp de X.

Esperanza y varianza de una v.a. discreta

Definiciones

Sea X una v.a. discreta definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se define la *esperanza, media o valor esperado* de X como

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xp(x).$$

Se define la *varianza* de X como

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 p(x).$$

Resultado

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier* función, entonces

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)p(x).$$

Ejemplo 1 (continuación)

La esperanza y varianza del número de águilas en tres volados son:

$$E(X) = 0\frac{1}{8} + 1\frac{3}{8} + 2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8} = 1.5$$

$$V(X) = (0-1.5)^2\frac{1}{8} + (1-1.5)^2\frac{3}{8} + (2-1.5)^2\frac{3}{8} + (3-1.5)^2\frac{1}{8} = 0.75$$

Ejemplo 2 (continuación)

La esperanza y varianza del mínimo en la extracción de tres bolas numeradas son:

$$E(X) = 1\frac{3}{5} + 2\frac{3}{10} + 3\frac{1}{10} = 1.5$$

$$V(X) = (1-1.5)^2\frac{3}{5} + (2-1.5)^2\frac{3}{10} + (3-1.5)^2\frac{1}{10} = 0.45$$

Ejemplos de variables aleatorias discretas

Notación

Hay un resultado teórico que afirma que las variables aleatorias están caracterizadas por su función de distribución, por lo que se usará indistintamente el término v.a. o distribución para hacer referencia a v.a. o distribuciones conocidas.

Distribución de Bernoulli

Una v.a. X tal que $X(\Omega) = \{0, 1\}$ se dice que tiene o sigue una distribución de Bernoulli con parámetro θ, $\theta \in (0, 1)$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

Lo anterior de denota como $X \sim Be(\theta)$.

El modelo anterior se usa en experimentos con sólo dos posibles resultados (también llamados ensayos Bernoulli), genéricamente llamados *éxito* (1) y *fracaso* (0), de manera que el parámetro θ se interpreta como la probabilidad de éxito en el experimento.

Distribución binomial

Definición

Se dice que una v.a. X tal que $X(\omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}*$, tiene o sigue una distribución binomial con parámetros n y θ, $\theta \in (0, 1)$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \dots, n.$$

Lo anterior se denota como $X \sim Bin(n, \theta)$.

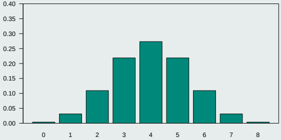
La distribución binomial se utiliza para modelar experimentos que se pueden que resultan de la realización de n ensayos Bernoulli independientes todos en condiciones idénticas, de manera que el resultado del experimento binomial es el conteo de éxitos.

$$Be(\theta) = Bin(1, \theta)$$

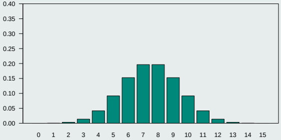
Ejemplo 4

Si $X \sim Bin(n, \theta)$, $n \in \mathbb{N}_*$ y $\theta \in (0,1)$, entonces

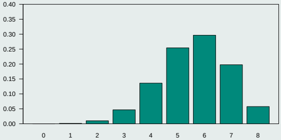
$$E(X) = n\theta \qquad \text{y} \qquad V(X) = n\theta(1-\theta).$$



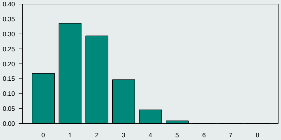
$Bin(8, 0.5)$



$Bin(15, 0.5)$



$Bin(8, 0.7)$



$Bin(15, 0.2)$

Distribución de Poisson

Definición

Se dice que una v.a. X con $X(\Omega) = \mathbb{N}$ tiene o sigue una distribución de Poisson con parámetro λ, $\lambda > 0$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x \in \mathbb{N}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim Po(\lambda)$.

Se utiliza la distribución de Poisson para modelar experimentos que resultan del conteo en el tiempo de la ocurrencia de eventos. Estos eventos deben cumplir con ciertas características*. El parámetro λ se interpreta como la tasa de ocurrencia.

Ejemplo 6

Otras distribuciones discretas

Distribución uniforme discreta

Se dice que una v.a. X tiene una distribución uniforme discreta con parámetro n, $n \in \mathbb{N}_*$, si $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \frac{1}{n}, \qquad x = 1, \ldots, n.$$

Distribución geométrica

Se dice que una v.a. X tiene una distribución geométrica con parámetro θ, $\theta \in (0, 1)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}_*$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \qquad x \in \mathcal{N}*.$$

Lo anterior se denota por $X \sim Geo(\theta)$.

La distribución geométrica se utiliza para modelar el resultado de experimentos que resultan de la observación repetida de ensayos Bernoulli independientes hasta que ocurre el primer éxito.

Ejemplo 7

Momentos de la distribución uniforme discreta

Ejemplo 8

Problema distribución geométrica

Otras distribuciones discretas

Distribución binomial negativa

Se dice que una v.a. X tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y θ, $r \in \mathbb{N}_*$ y $\theta \in (0,1)$, si $X(\omega) = r + \mathbb{N}$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \binom{x}{r} \theta^x (1-\theta)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, r+2, r+3, \ldots$$

Lo anterior se denota por $BinNeg(r, \theta)$.

La distribución binomial negativa se usa para modelar el resultado de experimentos que resultan de la observación repetida de ensayos Bernoulli independientes hasta que ocurren exactamente r éxitos.

$$Geo(\theta) = BinNeg(1, \theta)$$

Ejemplo 9

Problema distribución binomial negativa

Otras distribuciones discretas

Distribución hipergeométrica

Se dice que una v. a. discreta X tiene una distribución hipergeométrica con parametros $N, m, n \in \mathbb{N}_*$, con $N \geq m, n$, si su fmp está dada por

$$p(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \text{máx}\{0, n-(N-m)\} \leq x \leq \text{mín}\{m, n\}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim HGeo(N, m, n)$.

La distribución hipergeométrica se utiliza para modelar el resultados de experimentos como el que se explica a continuación: suponer que se tiene una urna con N bolas idénticas salvo el color, de las cuales m son verdes y el resto $(N-m)$ son negras, se extraen al azar n bolas de la urna y el experimento consiste en contar el número de bolas verdes extraídas.

Ejemplo 10

Problema distribución hipergeométrica

Función de densidad de una v.a. continua

Si X es una v.a. continua, su función de distribución P_X está caracterizada* por una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$P_X(B) = \int_B f(x)dx, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

En particular, si $B = (a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, entonces

$$P_X((a, b]) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Definición

Si X es una v.a. continua definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define la *función de densidad de probabilidad* (f.d.p. o fdp) de X como la función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. tal que

$$P_X(X) = P(X \in B) = \int_B f(x)dx, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Propiedades de la función de densidad

Propiedades de la fdp

- $f(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$

Ejemplo 11

Sea X una v.a. continua con fdp f definida como

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2. \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de c.

b) Calcular $P(X > 1)$.

Esperanza y varianza de una v.a. continua

Definiciones

Sea X una v.a. continua definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se define la *esperanza, media o valor esperado* de X como:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Se define la *varianza* de X como

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)dx.$$

Resultado

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier* función, entonces

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx.$$

Ejemplos

Ejemplo 12

Calcular $E(X)$ si X es una v.a. continua con fdp

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases}$$

Ejemplo 13

Si X es una v.a. continua con fdp

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases}$$

Calcular $E(e^X)$.

Propiedades de la esperanza y la varianza

Resultado

Sean X una v.a. definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a y b constantes, se cumple lo siguiente:

a) $E(aX + b) = aE(X) + b$.

b) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

c) $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Ejemplo 12 (continuación)

Calcular $V(X)$:

a) usando el resultado anterior,

b) a partir de la definición de varianza.

Función de distribución acumulada de una v.a.

Sea X una v.a. definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución P_X. Se define la *función de distribución acumulada* (f.d.a. o fda) de X como la función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = P_X\left((-\infty, x]\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Si X es una v.a. discreta con fmp p, entonces

$$F(x) = \sum_{y \in \delta_x} p(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $\delta_x = X(\Omega) \cap (-\infty, x] = \{y \in X(\Omega) : y \leq x\}$.

- Si X es una v.a. continua con fdp f, entonces

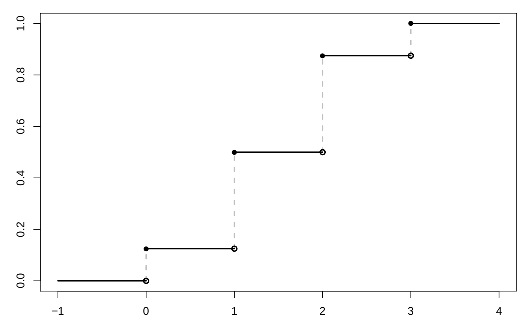
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1 (continuación)

La fmp de la variable aleatoria de la variable X que cuenta el número de águilas en tres volados es:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

La fda de X se puede representar como sigue



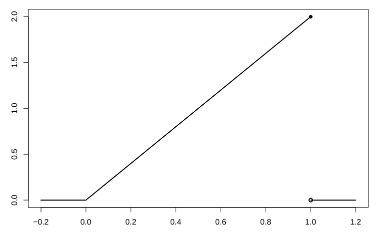
Ejemplo 12 (continuación

Si X es una v.a. continua con fdp

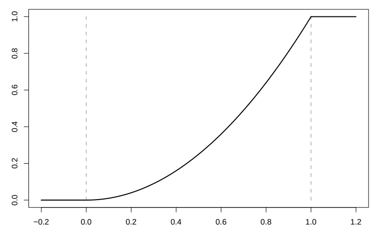
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases}$$

Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



Función de densidad



Función de distribución acumulada

Propiedades de la fda de una v.a.

Resultado

Sea X una v.a. definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con fda F, entonces se cumple:

a) F es no decreciente. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

c) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

d) F es continua por la derecha. $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$.

Resultado

Sea X una v.a. definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con fdp f y fda F, entonces se cumple

$$f(x) =^* \frac{d}{dx} F(x).$$

Distribución uniforme continua

Se dice que una v.a. continua X tiene o sigue una distribución uniforme (continua) con parámetros α y β, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota por $X \sim U(\alpha, \beta)$.

La función $\mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}(x)$ es la función indicadora del intervalo (α, β). Si $A \subset \mathbb{R}$, se define la *función indicadora* del conjunto A como la función $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ tal que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Resultado

Si $X \sim U(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, entonces:

a) $F(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]}(x) + \mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(x)$.

b) $E(X) = {}^{(\alpha+\beta)}/_{2}$ y $V(X) = {}^{(\beta-\alpha)^2}/_{12}$.

Distribución exponencial

Se dice que una v.a. continua X tiene o sigue una distribución exponencial con parámetro λ, $\lambda > 0$. si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota por $X \sim Exp(\lambda)$.

La distribución exponencial se utiliza principalmente para modelar tiempos de fallo, por ejemplo el tiempo de vida de un foco. También se usa para modelar la duración de un cierto evento, por ejemplo la duración de una llamada telefónica.

Resultado

Si $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, entonces:

a) $F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$, si $x > 0$ y $F(x) = 0$ si $x \leq 0$.

b) $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda^2$.

c) Si se define $Y = X/\lambda$, entonces $Y \sim Exp(1)$.

Distribución normal

Se dice que una v.a. continua X tiene o sigue una distribución normal con parámetros μ y σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

La distribución normal es sin duda la más importante en estadística. Se utiliza en la práctica para modelar errores medición, sin embargo, la mayor parte de las aplicaciones son asintóticas, gracias al Teorema Límite Central. Su fda no tiene forma cerrada, por lo que existen tablas con valores calculados.

Resultado

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, entonces:

a) $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

b) Si se define $Y = {(x-\mu)}/{\sigma}$, entonces $Y \sim N(0, 1)$.

Definición

Para $\alpha > 0$ se define la función gamma, denotada por Γ como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Definición

Para $\alpha, \beta > 0$ se define la funcion beta, denotada por B como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Resultado

a) $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$
b) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (si $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$)
c) $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$
d) $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Otras distribuciones continuas

Distribución Gamma

Se dice que una v.a. continua X tiene o sigue una distribución Gamma con parámetros $\alpha, \lambda > 0$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\lambda}}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$.

Distribución Beta

Se dice que una v.a. continua X tiene o sigue una distribución Beta con parámetros $\alpha, \beta > 0$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim B(\alpha, \beta)$.

Otras distribuciones continuas

Distribución de Cauchy

Se dice que una v.a. continua X tiene una distribución de Cauchy con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\gamma > 0$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1 + {(x-\mu)^2}/{\gamma^2}\right)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota como $X \sim Cauchy(\mu, \gamma)$.

Distribuión de Weibull

Se dice que una v.a. continua X tiene una distribución de Weibull con parámetros $\alpha, \lambda > 0$, si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-({x}/{\lambda})^{\alpha}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior se denota por $X \sim Weibull(\alpha, \gamma)$.

Resultado

Sea X una v.a. continua definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva y diferenciable en $X(\Omega)$. Entonces

$$f_y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \mathbb{1}_{X(\Omega)}(y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo X

Utilizar el resultado anterior para mostrar lo siguiente.

a) Si $X \sim Exp(1)$, entonces $Y = e^{-X} \sim U(0,1)$.

b) Si $X \sim Cauchy(0,1)$, entonces $Y = {}^{1}/_{X} \sim Cauchy(0,1)$.

Vectores aleatorios

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Un *vector aleatorio* (v.a., cuando no exista confusión con variable aleatoria) $\mathbf{X}$ es una función* multivariada que va del espacio muestral Ω a $\mathbb{R}^p$, con $p \in \mathbb{N}_*$

$$\mathbf{X}(\omega) \to (X_1(\omega), \ldots, X_p(\omega))$$

- Las componentes $X_1, \ldots, X_p$ de un vector aleatorio $\mathbf{X}$ son variables aleatorias.
- El rango $\mathbf{X}(\Omega)$ de $\mathbf{X}$ ahora es un subconjunto de $\mathbb{R}^p$.
- Ahora se define $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ como la mínima σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que contiene a los conjuntos de la forma $\prod_{i=1}^{p}(a_i, b_i)$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $a_i < b_i$, para $i = 1 \ldots, p$.

Sean $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ es un v.a. definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, entonces $g(\mathbf{X}) = g(X_1, \ldots, X_p)$ es un vector a. (si $q = 1$ variable a.).

Función de distribución de un v.a.

Definición

La función de distribución de un v.a. $\mathbf{X}$ es la función $P_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \to [0,1]$ tal que a cada conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ le asigna $P_{\mathbf{X}}(A) = P(\mathbf{X} \in A)$.
Al igual que las variables a., la función de distribución caracteriza a los vectores a.

Definición

Dado un v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ con función de distribución $P_{\mathbf{X}}$, se define la *función de distribución acumulada* (fda) de $\mathbf{X}$ como la función $F : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ tal que

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \in \prod_{i=1}^{p}(-\infty, x_i]) = P\left(X_1 \leq x_1 . \ldots . X_p \leq x_p\right), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$.

Vectores aleatorios

Ejemplo

Un experimento consiste en lanzar dos dados *balanceados* d_1 y d_2, el resultado es el par de resultados en las caras. El espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\ldots(6,5),(6,6)\}$$

donde (x, y) representa que el resultado del primer dado es x y el del segundo dado es y.

- En este espacio la función identidad $\mathbf{X}(\omega) = \omega$ es un vector aleatorio (porque $\omega \in \mathbb{R}^2$).
- También podemos definir la función $\mathbf{X}(\omega) = (\min(\omega_1, \omega_2), \omega_1 + \omega_2)$.

Definición

Sea $\mathbf{X}$ un v. a. definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Se dice que $\mathbf{X}$ es un v.a. discreto si todas sus componentes son v.a. discretas.
- Se dice que $\mathbf{X}$ es un v.a. continuo si todas sus componentes son v.a. continuas.

Función de distribución acumulada de un v.a.

Propiedades de la fda

Sea F la fda de un v.a. de dimensión p, entonces se cumple

- $0 \leq F(\mathbf{x}) \leq 1$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$.
- F es no decreciente en cada una de sus entradas.
- $\lim_{x_i \to -\infty} F(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$.
- $\lim_{\mathbf{x} \to \infty} F(\mathbf{x}) = 1$, donde $\mathbf{x} \to \infty$ indica que $x_i \to \infty$ para $i = 1, \ldots, \infty$.
- F es continua por la derecha en cada una de sus entradas.

A partir de ahora se asumirá que $p = 2$.

Función masa de probabilidad de un v.a. discreto

Definición

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ un v.a. discreto definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define la *función masa de probabilidad* (fmp) de $\mathbf{X}$ como la función $p : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ tal que

$$p(x, y) = P_{\mathbf{X}}(\{(x, y)\}) = P(X = x, Y = y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se puede recuperar la función de distribución de un v.a. a partir de su fmp ya que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \sum_{(x,y)\in B} p(x, y).$$

Propiedades de la fmp

- $0 \leq p(x, y) \leq 1$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\sum_{(x,y)\in \mathbf{X}(\Omega)} p(x, y) = 1$.

Ejemplo (Dados)

Esperanza de una función de un v.a.

Definición

Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ un v.a. discreto definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con fmp $p(\cdot, \cdot)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define la esperanza de $g(\mathbf{X}) = g(X, Y)$ como

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in \mathbf{X}(\Omega)} g(x, y)p(x, y).$$

Ejemplo dados)

Se lanzan dos dados balanceados, cuál es el valor esperado de la suma de sus caras.

Distribuciones marginales

Si $\mathbf{X} = (X, Y)$ es un v. a. discreto, entonces X y Y son variables aleatorias, por lo que se podría estar interesado en probabilidades que involucren sólo a X o sólo a Y. Sabemos que las distribuciones de X y Y están caracterizadas por sus fmp.