Conceptos básicos de inferencia estadística | Semestre 2018-1

Tarea 6

Fecha de entrega: 19 de octubre

1. Se tiene una observación de una variable aleatoria discreta X con fmp dada $p(x\,|\,\theta)$, donde $\theta \in \{1,2,3\}$. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

x	$p(x\,\|\,1)$	$p(x\,\|\,2)$	$p(x\,\|\,3)$
0	0.30	0.15	0
1	0.30	0.15	0
2	0	0.25	0.30
3	0.20	0.25	0.40
4	0.20	0	0.30

2. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población con fdp dada por

$$f(x\,|\,\theta) = k\frac{\theta^2}{x^3}, \qquad \theta > 0, x \geq \theta.$$

   a) Calcular el valor de k para que $f(x\,|\,\theta)$ se una función de densidad.

   b) Encontrar un estimador de momentos de θ.

   c) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

3. Se tiene una observación de una variable aleatoria continua X con fdp dada por

$$f(x\,|\,\theta) = \begin{cases} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), & \text{si } \theta = 0, \\ \mathbb{1}_{(0,1)}(x)/(2\sqrt{x}), & \text{si } \theta = 1. \end{cases}$$

   Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

4. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población con fdp

$$f(x\,|\,\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x), \qquad \theta > 0.$$

   a) Encontrar un estimador de momentos de θ.

   b) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   c) Calcular esperanzas y varianzas de los estimadores anteriores.

5. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población con fda dada por

$$F(x\,|\,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ (x/\beta)^\alpha, & \text{si } 0 \leq x \leq \beta, \\ 1, & \text{si } x > \beta. \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0.$$

   Si asumimos que β es conocido, encontrar el estimador de máxima verosimilitud de α.

6. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población con fdp dada por

$$f(x\,|\,\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad \theta > 0.$$

   a) Encontrar un estimador de momentos de θ.

b) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

c) Calcular la esperanza y la varianza del estimador del inciso *b*).

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal $N(0, \sigma^2)$,

   a) Encontrar un estimador de momentos de σ^2.

   b) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.

   c) Calcular esperanzas y varianzas de los estimadores anteriores.

8. $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria $F(\mu, \sigma^2)$ (no necesariamente normal). Mostrar lo siguiente:

   a) $E(\bar{X}_n) = \mu$.

   b) $V(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$.

- Se puede mostrar que si dos variables aleatorias X y Y son independientes, entonces

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

Este resultado se puede generalizar para la suma de n v.a. independientes. Se puede aplicar el resultado anterior para encontrar la distribución de la suma de n v.a. Por ejemplo, sea $X_1, \ldots, X_n$ forman una muestra aleatoria de una población $B(\theta)$. La fgm de esta distribución es

$$M_{X_j}(t) = 1 - \theta + \theta e^t, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Si definimos $Y = \sum_{j=1}^n X_j$, entonces

$$M_Y(t) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \theta + \theta e^t\right) = \left(1 - \theta + \theta e^t\right)^n.$$

Como $M_Y(t)$ coincide con la fgm de una v.a. $Bin(n, \theta)$, se sigue que la suma de n v.a. $B(\theta)$ independientes tiene distribución $Bin(n, \theta)$.

9. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con $X_j \sim Bin(m_j, \theta)$, $j = 1, \ldots, n$, mostrar que

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j \sim Bin\left(\sum_{j=1}^n m_j, \theta\right).$$

10. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con $X_j \sim Ga(\alpha_j, \lambda)$, mostrar que

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j \sim Ga\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j, \lambda\right).$$

11. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con $X_j \sim Poi(\lambda_j)$, mostrar que

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j \sim Poi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right).$$

12. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, mostrar que

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right).$$