Conceptos básicos de inferencia estadística | Semestre 2018-1

Tarea 7. Parte 2

Fecha de entrega: 30 de octubre

- La información de Fisher de θ proporcionada por una observación de una fdp o fmp $f(\cdot\,|\,\theta)$ o $p(\cdot\,|\,\theta)$ se define como
$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X\,|\,\theta)\right)^2\right]$$
Bajo condiciones de regularidad se cumple que
$$I(\theta) = -E_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X\,|\,\theta)\right).$$

6. Calcular $I(\lambda)$ cuando $X \sim Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Considerar la parametrización habitual para la densidad exponencial
$$Exp(x\,|\,\lambda) = \lambda e^{-x\lambda}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

7. Calcular $I(\theta)$ cuando $X \sim Bin(n,\theta)$, con $n \in \mathbb{N}^+$ conocido y $\theta \in (0,1)$.

8. Calcular $I(\lambda)$ cuando $X \sim Poi(\lambda)$, con $\lambda > 0$.

9. Si $X \sim N(\mu,\tau)$, es decir $E(X) = \mu$ y $V(X) = \tau$, calcular:

   a) $I(\mu)$ asumiendo que τ es conocida.

   b) $I(\tau)$ asumiendo que μ es conocida.

- Si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ. el Teorema de Cramér-Rao que establece
$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)} = CICR(\theta),$$
donde $I(\theta)$ es la información de Fisher de θ proporcionada por una observación.
Además, si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ tal que $V(\hat{\theta}) = CICR(\theta)$, entonces $\hat{\theta}$ es el UMVUE para θ. Al contrario, si $V(\hat{\theta}) > CICR(\theta)$, no podemos garantizar que $\hat{\theta}$ no es el UMVUE para θ.

10. En el Ejercicio 6.

    a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ, digamos T_1. ¿T_1 es insesgado para λ?

    b) Si T_1 no es insesgado, construir a partir de T_1, un estimador T_2 que sea insesgado para λ.

    c) Calcular la varianza del T_2.

    d) Comparar la varianza de T_2 con $CICR(\lambda)$ calculada en el Ejercicio 6, ¿es T_2 el UMVUE de λ?

11. En el Ejercicio 7.

    a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ, digamos T. ¿Es T insesgado para θ?

b) Calcular la varianza de T.

c) Comparar la varianza de T con $CICR(\theta)$ calculada en el Ejercicio 7, ¿es T el UMVUE θ?

12. En el Ejercicio 8.

    a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ, digamos T. ¿Es T insesgado para λ?

    b) Calcular la varianza de T.

    c) Comparar la varianza de T con la cota $CICR(\lambda)$ calculada en el Ejercicio 8, ¿es T el UMVUE λ?

13. En el Ejercicio 9.

    a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de μ, digamos T. ¿Es T insesgado para μ?

    b) Calcular la varianza de T.

    c) Comparar la varianza de T con $CICR(\mu)$ calculada en el Ejercicio 9, ¿es T el UMVUE θ?

14. En el Ejercicio 9.

    a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de σ^2, digamos T_1. ¿T_1 es insesgado para σ^2?

    b) Si T_1 no es insesgado, construir a partir de T_1, un estimador T_2 que sea insesgado para σ^2.

    c) Calcular la varianza del T_2.

    d) Comparar la varianza de T_2 con $CICR(\sigma^2)$, ¿es T_2 el UMVUE de σ^2?
    Hint: Sustituir τ por σ^2 en la expresión de $CICR(\tau)$ del Ejercicio 9 para obtener $CICR(\sigma^2)$.