Conceptos básicos de inferencia estadística | Semestre 2018-1

Tarea 8

Fecha de entrega: 17 de noviembre

1. Distribución Binomial $Bin(m, \theta)$, m conocido.
   a) Determine si esta distribución pertenece a la familia exponencial de un parámetro.
   b) Encontrar un estadístico suficiente dada una muestra aleatoria de tamaño n.
   c) Encontrar el UMVUE de θ. Justifique su respuesta
2. Distribución de Poisson $Poi(\lambda)$.
   a) Determine si esta distribución pertenece a la familia exponencial de un parámetro.
   b) Encontrar un estadístico suficiente dada una muestra aleatoria de tamaño n.
   c) Encontrar el UMVUE de λ. Justifique su respuesta
3. Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$.
   a) Determine si esta distribución pertenece a la familia exponencial de un parámetro.
   b) Encontrar un estadístico suficiente dada una muestra aleatoria de tamaño n.
   c) Entontrar el UMVUE de λ. Jusifique su respuesta

   Hint: Usar la parametrización de la densidad exponencial tal que $E(X) = \lambda$.
4. Distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 0$.
   a) Determine si esta distribución pertenece a la familia exponencial de un parámetro.
   b) Encontrar un estadístico suficiente dada una muestra aleatoria de tamaño n.
   c) Encontrar el UMVUE de σ^2. Justifique su respuesta.
5. Determine si la distribución Beta pertenece a la familia exponencial de dos parámetros.
6. Determine si la distribución Gamma pertenece a la familia exponencial de dos parámetros.
7. Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una distribución Weibull con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su fdp está dada por

$$f(x \mid \alpha, \beta) = kx^{\alpha-1} \exp\left\{ -\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

   a) Calcular el valor de k para que $f(x \mid \alpha, \beta)$ sea realmente una función de densidad.
   b) Determinar si la distribución Weibull pertenece a la familia exponencial de dos parámetros.

- *Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza desconocida.* En clase obtuvo un intervalo de confianza para la media de una distribución normal cuando la varianza es conocida. La expresión general de los estadísticos que determinan el intervalo es la siguiente

$$L(\mathbf{X}) = \bar{X}_n - z^{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad U(\mathbf{X}) = \bar{X}_n + z^{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

  Usar el resultado anterior para responder los Ejercicios 8, 9 y 10.

8. Se sabe que la vida en horas de un foco de 100 watts de cierta marca tiene una distribución aproximada normal con desviación estándar $\sigma = 30$ horas. Se toma una muestra al azar de 50 focos y resulta que la vida media fue de 1550 horas. Construya un intervalo de confianza del 95 % para el verdadero promedio de vida de estos focos. Interprete los resultados.

9. Las mediciones del número de cigarros fumados al día por un grupo de diez fumadores es el siguiente: 5, 10, 3, 4, 5, 8, 20, 4, 1, 10. Suponiendo que los datos provienen de una muestra tomada al azar de una población normal con $\sigma = 1.2$, construir un intervalo de confianza 99 % para el promedio del número cigarros fumados al día de los fumadores en la población estudiada. Interpretar los resultados.

10. Se tiene interés en estudiar la distribución de las estaturas en cierta población humana. Para ello se realizaron mediciones a 19 personas, con los siguientes resultados: 1.65, 1.75, 1.63, 1.81, 1.74, 1.59, 1.73, 1.66, 1.65, 1.83, 1.77, 1.74, 1.64, 1.69, 1.72, 1.66, 1.55, 1.60, 1.62. Si se asume que la distribución de las estaturas es normal con $\sigma = 0.10$, calcular un intervalo de confianza 90 % para la estatura promedio. Interpretar los resultados.

11. *Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza desconocida.* Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Suponer que se cumple lo siguiente:

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{(n-1)}$$

donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ y $t_{(n-1)}$ denota la distribución t de Student con $n-1$ grados del libertad.

   a) ¿Es $Q(\mathbf{X}, \mu)$ una cantidad pivotal? Justifique su respuesta.

   b) Obtener un intervalo de confianza para $100(1-\alpha)$ %, $\alpha \in (0,1)$, para μ a partir de $Q(\mathbf{X}, \mu)$. Se puede seguir el procedimiento mostrado en clase.

En el curso de Regresión Múltiple se justificará que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{(n-1)}$.

- Usar el resultado anterior para responder a los Ejercicios

12. Se realizan 20 pruebas de resistencia de un cierto material obteniéndose los siguientes datos: 2225, 2300, 2217, 2190, 2295, 2285, 2195, 2255, 2232, 2252, 2272, 2231, 2223, 2211, 2219, 2231, 2218, 2262, 2257, 2261. Construya un intervalo de confianza del 98 % para la resistencia media de este material, suponiendo una distribución normal. Interprete los resultados.

13. Con los datos del Ejercicio 10 calcular un intervalo de confianza 90 % para la estatura promedio, pero ahora asumiendo que σ^2 es desconocida. Intepretar los resultados. ¿Qué intervalo es más amplio?

Los ejercicios numéricos fueron tomados de aquí.