**Conceptos básicos de inferencia estadística | Semestre 2018-1**

*Tarea 9*

Fecha de entrega: 24 de noviembre

## Ejercicios prácticos

1. La cadena Fox considera remplazar uno de sus programas de investigación en crímenes, que se transmite durante las horas de mayor audiencia, con una nueva comedia orientada a la familia. Antes de tomar una decisión definitiva, los ejecutivos estudian una muestra de 400 telespectadores. Después de ver la comedia, 250 afirmaron que la verían y sugirieron remplazar el programa de investigación de crímenes. Responda lo siguiente.

   *a*) ¿Cuál es la proporción estimada de personas que verían la nueva serie de televisión?

   *b*) Calcular un intervalo de confianza 99 % (aproximada) para la proporción anterior.

   *c*) ¿Se tienen resultados concluyentes acerca de las preferencias de la población por la nueva serie de comedia familiar?

   *d*) ¿En qué supuestos de basan las respuestas anteriores?

2. Muchos inversionistas y analistas financieros piensan que el promedio industrial Dow Jones (DJIA) es un buen barómetro el mercado de acciones. El 31 de enero de 2006, 9 de las 30 acciones que constituyen el DJIA subieron de precio. A partir de este hecho, un analista afirmó que 30 % de las acciones de la Bolsa de Nueva York subirían ese mismo día. En una muestra de 50 acciones de la bolsa de Nueva York, 24 subieron. Responda lo siguiente.

   *a*) ¿Cuál es la proporción estimada de acciones que subieron?

   *b*) Construir un intervalo de confianza 99 % para la proporción anterior?

   *c*) ¿Se tienen resultados concluyentes para afirmar que el analista acertó en su predicción?

   *d*) ¿En qué supuestos se basan las respuestas anteriores?

3. La directora de compras de una fábrica de partes industriales investiga la posibilidad de comprar un nuevo tipo de fresadora. Se determinó que la nueva máquina se adquirirá si existe evidencia de que las partes producidas tienen una resistencia promedio mayor que piezas que provienen de la máquina actual. La desviación estándar de la resistencia para las partes que provienen de la máquina antigua es 10 kg y para las de la nueva máquina 9 kg. Se seleccionó una muestra de 100 partes producidas en la máquina actual y en promedio la resistencia fue de 65 kg, en tanto que una muestra similar de 100 unidades de piezas que se procesaron con la máquina nueva arrojó una media muestral de 72 kg.

   *a*) Construir un intervalo de confianza 99 % para la diferencia de la resistencia de las piezas provenientes de la máquina actual y de la máquina nueva.

   *b*) ¿Se tienen resultados concluyentes para decidir si se adquiere o no la máquina nueva?

   *c*) ¿En qué supuestos se basan las respuestas anteriores?

4. En un estudio reciente se comparó el tiempo que pasan juntas las parejas en que sólo trabaja uno de los cónyuges con las parejas en que ambos trabajan. De acuerdo con los registros, la cantidad media de tiempo que pasan juntos viendo televisión entre las parejas en que solo trabaja uno de los cónyuges fue 61 minutos

por día, con una desviación estándar de 15.5 minutos. Para las parejas en que los dos trabajan, el número medio de minutos viendo televisión fue de 48.4 minutos con una desviación estándar de 18.1 minutos. En el estudio había 15 parejas en que solo trabaja uno y 12 en que trabajan los dos. Suponemos que las varianzas poblacionales son iguales pero desconocidas.

*a*) Calcular un intervalo de confianza 97 % para la diferencia de las cantidades medias de tiempo que pasan juntas las parejas.

*b*) ¿Se tienen resultados concluyentes sobre cuál de los dos tipos de parejas pasan más tiempo juntas?

*c*) ¿En qué supuestos se basan las respuestas anteriores?

5. Los fabricantes de reproductores de DVD desean probar si una reducción pequeña en el precio de los reproductores sería suficiente para aumentar las ventas de sus productos. Los datos elegidos al azar de 15 de las ventas totales semanales en tiendas departamentales en una cierta región, antes de la reducción en el precio reveló un promedio de \$118, 764 y una desviación estándar de muestra de \$15,192. Una muestra aleatoria de 12 de las ventas totales semanales después de la pequeña reducción en el precio tuvo un promedio de \$123,660 y una desviación estándar de la muestra de \$12,042. Además se asume que las varianzas de las ventas totales no son iguales antes y después del incremento.

   *a*) Calcular un intervalo de confianza 98 % para la diferencia de la media de los precios antes y después del incremento.

   *b*) ¿Se tienen resultados concluyentes para decidir si la reducción en los precios tuvo un efecto positivo en las ventas totales?

   *c*) ¿En qué supuestos se basan las respuestas anteriores?

6. La *National Health Statistics Reports* en los informes de fecha 22 de octubre de 2008, incluye la siguiente información sobre la altura (cm) para las mujeres blancas no hispanas.

| Edad | Tamaño de muestra ($n$) | Media muestral ($\bar{X}_n$) | Desviación estándar ($S_n$) |
|---|---|---|---|
| 20-39 | 866 | 164.85 | 0.23 |
| 60 y más | 934 | 160.27 | 0.28 |

   *a*) Calcular un intervalo de confianza 95 % para la diferencia entre la altura media de las mujeres mayores y las mujeres jóvenes.

   *b*) ¿Se tiene información concluyente para afirmar que las mujeres mayores tienen, en promedio, una menor altura que las mujeres jóvenes?

   *c*) ¿En qué supuestos se basan las respuestas anteriores?

## Ejercicios teóricos

7. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población $U(0, \theta)$, con $\theta > 0$ y desconocida. Responder lo siguiente.

   *a*) ¿Cuál es la distribución de $X_{(n)}$? Justifique su respuesta.

   *b*) ¿Cuál es la distribución de $Q = X_{(n)}/\theta$? Justifique su respuesta.

   *c*) ¿Es $Q$ una cantidad pivotal para $\theta$? Justifique su respuesta.

*d*) Obtener un intervalo de confianza $100(1-\alpha)\,\%$ para $\theta$ a partir de $Q$.

8. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población $Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$ y desconocida, con la parametrización tal que $E(X) = \lambda$.

   *a*) Justificar que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n, \lambda)$.

   *b*) Justificar que $Q = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n, 1)$.

   *c*) ¿$Q$ una cantidad pivotal para $\lambda$?

   *d*) Obtener un intervalo de confianza $100(1-\alpha)\,\%$ para $\lambda$ a partir de $Q$.

9. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población $Poi(\lambda)$, con $\lambda > 0$ y desconocida.

   *a*) Construir un intervalo de confianza aproximada $100(1-\alpha)\,\%$ para $\lambda$ a partir del Teorema Límite Central. Si es necesario, utilizar más de una aproximación

   *b*) Explorar vía simulación la cobertura de los intervalos generados en el inciso anterior. Considerar $\lambda = 10$, $\alpha = 0.01$ y tomar 5,000 muestras de tamaños $n = 30, 50, 100, 250$.

   *c*) De los resultados del inciso anterior, ¿a partir de qué tamaño de muestra la cobertura de los intervalos se acerca a la real?

10. Nuevamente, suponer que se tiene una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población $Poi(\lambda)$, con $\lambda > 0$ y desconocida.

    *a*) Construir un intervalo de confianza aproximada $100(1-\alpha)\,\%$ para $\lambda$ a partir de la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud de $\lambda$. ¿El intervalo obtenido coincide con el del inciso anterior?

    *b*) Ahora se tiene interés en calcular un intervalo de confianza para $\theta = P(X = 0) = e^{\lambda}$. Por la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud, la estimación puntual es $e^{\hat{\lambda}}$. Construir un intervalo de confianza aproximada $100(1-\alpha)\,\%$ para $\theta = e^{\lambda}$.

    *c*) Explorar vía simulación la cobertura de los intervalos generados en el inciso anterior. Considerar $\lambda = 4$, $\alpha = 0.01$ y tomar 5,000 muestras de tamaños $n = 30, 50, 100, 250$.

    *d*) De los resultados del inciso anterior, ¿a partir de qué tamaño de muestra la cobertura de los intervalos se acerca a la real?