

Conceptos básicos de la Inferencia Estadística | Semestre 2019-1

Tarea 03

Fecha de entrega: 29 de agosto

Instrucciones: responder correctamente **ocho** ejercicios.

1. Sea X una variable aleatoria continua con fdp dada por

$$f(x) = k(1 - x^2)\mathbb{1}_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Determinar el valor de k para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.
- Encontrar la función de distribución acumulada de X .

2. Suponer que el tiempo de vida, en años, de cierto dispositivo electrónico se puede modelar con una variable continua con fdp dada por

$$f(x) = ke^{-x/5}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Determinar el valor de k para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.
- Calcular la probabilidad de que un dispositivo funcione al menos 5 años.
- Encontrar la fda del tiempo de vida.

3. Si X es una variable aleatoria continua con fda $f(\cdot)$ se define el valor esperado o esperanza de X como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

- Calcular la esperanza de la variable aleatoria del Ejercicio 1.
- Calcular la esperanza de la variable aleatoria del Ejercicio 2.

4. Sea X es una variable aleatoria continua con fdp dada por

$$f(x) = (a + bx^2)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Si $E(X) = 0.6$, encontrar los valores de a y b para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.
- Encontrar fda de X .

5. Un establecimiento de servicio a clientes cierra sus puertas a las 16:00 h y solamente tiene una ventanilla de servicio. El empleado de la ventanilla se hasta que el último cliente haya sido atendido. Responder lo siguiente.

- Si en un día el último cliente comienza a ser atendido a las 15:55 h y se puede asumir que el tiempo de atención, medido en minutos, se puede considerar como una variable aleatoria uniforme en el intervalo de 0 a 90 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h?

- b) En el ejemplo anterior, suponer que el tiempo de atención tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/60$. Calcular la probabilidad de que el empleado salgan después de las 17:00 h.
- c) En el ejemplo anterior, suponer que el primero de los últimos tres clientes comienza a ser atendido a las 14:25 h. Si los tiempos de atención son independientes y se puede asumir que tienen una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/60$. Calcular la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h.
- d) Ejemplo anterior, suponer que en un día el último cliente comienza a ser atendido a las 15:55 h y si se puede asumir que el logaritmo tiempo de atención en minutos, tiene una distribución normal con media $\mu = 3.6$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Calcular la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h.

6. Calcular $E(X)$ para X variable aleatoria continua con fdp:

a) $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.

b) $f(x) = 5(1-x)^4\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

c) $f(x) = 5/x^2\mathbb{1}_{(5,\infty)}(x)$.

7. Si X es una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 36$, calcular con R las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 5)$.

b) $P(4 < X < 16)$.

c) $P(X < 8)$.

d) $P(X < 20)$.

e) $P(X > 16)$.

8. Suponer que X es una variable aleatoria normal con $\mu = 5$. Si $P(X > 9) = 0.2$, ¿cuál es el valor aproximado de $V(X)$?

9. Si X es una variable aleatoria y a, b son constantes, $b \neq 0$. Mostrar lo siguiente.

a) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

b) $V(a + bX) = b^2V(X)$.

Mostrar por separado para X continua y discreta.

10. Calcular el valor esperado y la varianza de las siguientes variables aleatorias.

a) $X \sim U(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$.

b) $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, con $\alpha, \lambda > 0$.

c) $X \sim Be(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$.

d) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

11. En una comunidad grande se discute la aprobación de un aumento a cierto impuesto a la renta. Si el 65% de las personas está a favor del incremento, aproximar la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 100 personas haya:

a) Al menos 50 en fevor de aumento.

b) Entre 60 y 70. ambos inclusive. que estén a favor.

c) menos de 75 a favor de la propuesta.

Hint: La solución exacta a este ejercicio está dada por la distribución binomial, pero el objetivo es utilizar la aproximación normal. No olvidar el factor de corrección por continuidad.