Conceptos básicos de la Inferencia Estadística | Semestre 2019-1

Tarea 05

Fecha de entrega: 24 de octubre

Instrucciones: responder correctamente lo siguientes ejercicios.

1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Be(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$, parámetros desconocidos. Encontrar los estimadores de momentos de α y β.

2. Se tiene una observación de una variable aleatoria discreta X con fmp dada $p(x|\theta)$, donde $\theta \in \{1, 2, 3\}$. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

x	$p(x\|1)$	$p(x\|2)$	$p(x\|3)$
0	0.30	0.25	0.00
1	0.30	0.25	0.00
2	0.00	0.25	0.30
3	0.20	0.25	0.40
4	0.20	0.00	0.30

3. Se tiene una observación de una variable aleatoria continua X con fdp dada por

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), & \text{si } \theta = 0, \\ \mathbb{1}_{(0,1)}(x)/(2\sqrt{x}), & \text{si } \theta = 1. \end{cases}$$

Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

4. Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria de tamaño 2 de una distribución $N(\theta, 1)$. Considerar los siguientes tres estimadores de θ.

$$T_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$
$$T_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$
$$T_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

   a) Determinar qué estimadores son insesgados para θ.

   b) Calcular las varianzas de los tres estimadores.

   c) Calcular el ECM de los tres estimadores.

   d) ¿Qué estimador tiene menor ECM?

5. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Considerar la siguiente parametrización de la densidad exponencial:

$$Exp(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

a) Encontrar un estimador insesgado para λ a partir de $X_{(1)}$. Este estimador será T_1.

b) Calcular el ECM de T_1.

c) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de λ. Este estimador será T_2.

d) Calcular el ECM de T_2.

e) Graficar $ECM(T_1)$ y $ECM(T_2)$ como funciones de λ y decidir qué estimador es mejor y en qué casos.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $U(0, \theta)$, con $\theta > 0$.

   a) Sea T_1 el estimador de momentos de θ. Calcular el ECM de T_1.

   b) Sea T_2 el estimador de máxima verosimilitud de θ. Calcular el ECM de T_2.

   c) Graficar $ECM(T_1)$ y $ECM(T_2)$ como funciones de θ y decidir qué estimador es mejor y en qué casos.