Conceptos básicos de la Inferencia Estadística | Semestre 2020-1

Tarea 03

Fecha de entrega: 28 de agosto

Instrucciones: responder correctamente **ocho** ejercicios.

1. Sea X una variable aleatoria continua con fdp dada por

$$f(x) = k(1 - x^2)\mathbb{1}_{(-1,1)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Determinar el valor de k para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.

   b) Encontrar la función de distribución acumulada de X.

2. Suponer que el tiempo de vida, en años, de cierto dispositivo electrónico se puede modelar con una variable continua con fdp dada por

$$f(x) = ke^{-x/5}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Determinar el valor de k para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.

   b) Calcular la probabilidad de que un dispositivo funcione al menos 5 años.

   c) Encontrar la fda del tiempo de vida.

3. Si X es una variable aleatoria continua con fda $f(\cdot)$ se define el valor esperado o espeanza de X como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

   a) Calcular la esperanza de la variable aleatoria del Ejercicio 1.

   b) Calcular la esperanza de la variable aleatoria del Ejercicio 2.

4. Sea X es una variable aleatoria continua con fdp dada por

$$f(x) = (a + bx^2)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Si $E(X) = 0.6$, encontrar los valores de a y b para que $f(\cdot)$ sea realmente una fdp.

   b) Encontrar fda de X.

5. Un establecimiento de servicio a clientes cierra sus puertas a las 16:00 h y solamente tiene una ventanilla de servicio. El empleado de la ventanilla se hasta que el último cliente haya sido atendido. Responder lo siguiente.

   a) Si en un día el último cliente comienza a ser atendido a las 15:55 h y se puede asumir que el tiempo de atención, medido en minutos, se puede considerar como una variable aleatoria uniforme en el intervalo de 0 a 90 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h?

b) En el ejemplo anterior, suponer que el tiempo de atención tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/60$. Calcular la probabilidad de que el empleado salgan después delas 17:00 h.

c) En el ejemplo anterior, suponer que el primero de los últimos tres clientes comienza a ser atendido a las 14:25 h. Si los tiempos de atención son independientes y se puede asumir que tienen una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/60$. Calcular la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h.

d) Ejemplo anterior, suponer que en un día el último cliente comienza a ser atendido a las 15:55 h y si se puede asumir que el logaritmo tiempo de atención en minutos, tiene una distribución normal con media $\mu = 3.6$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Calcular la probabilidad de que el empleado salga después de las 17:00 h.

6. Calcular $E(X)$ para X variable aleatoria continua con fdp:

   a) $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.

   b) $f(x) = 5(1-x)^4\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

   c) $f(x) = 5/x^2\mathbb{1}_{(5,\infty)}(x)$.

7. Si X es una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 36$, calcular con R las siguientes probabilidades.

   a) $P(X > 5)$.

   b) $P(4 < X < 16)$.

   c) $P(X < 8)$.

   d) $P(X < 20)$.

   e) $P(X > 16)$.

8. Suponer que X es una variable aleatoria normal con $\mu = 5$. Si $P(X > 9) = 0.2$, ¿cuál es el valor aproximado de $V(X)$?.

9. Si X es una variable aleatoria y a, b son constantes, $b \neq 0$. Mostrar lo siguiente.

   a) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

   b) $V(a + bX) = b^2V(X)$.

   Mostrar por separado para X continua y discreta.

10. Calcular el valor esperado y la varianza de las siguientes variables aleatorias.

    a) $X \sim U(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$.

    b) $X \sim Ga(\alpha, \lambda$, con $\alpha, \lambda > 0$.

c) $X \sim Be(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$.

d) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

11. En una comunidad grande se discute la aprobación de un aumento a cierto impuesto a la renta- Si el 65% de las personas está a favor del incremento, aproximar la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 100 personas haya:

    a) Al menos 50 en fevor de aumento.

    b) Entre 60 y 70. ambos inclusive. que estén a favor.

    c) menos de 75 a favor de la propuesta.

    Hint: La solución exacta a este ejercicio está dada por la distribución binomial, pero el objetivo es utilizar la aproximación normal. No olvidar el factor de corrección por continuidad.