Regresión múltiple 17-2

Tarea 6

Fecha de entrega: 06/04/2017

1. Considerar las siguientes matrices

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ \frac{1}{2}p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q \\ 0 & p & q \end{pmatrix}$$

con $p + q = 1$ y $p, q > 0$. Mostrar que

   a) $\mathbf{P} = \mathbf{1}_3 \begin{pmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix}$,
   b) $\mathbf{P1}_3 = \mathbf{1}_3$,
   c) $\mathbf{T1}_3 = \mathbf{1}_3$,
   d) $\mathbf{TP} = \mathbf{PT} = \mathbf{P}$,
   e) $\mathbf{T}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{T})$,
   f) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

2. *a)* Mostrar que $\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{J}_n\right)$ es idempotente.

   b) Si p, q r y s son escalares, mostrar que

$$(p\mathbf{I}_n + q\mathbf{J}_n)(r\mathbf{I}_n + s\mathbf{J}_n) = pr\mathbf{I}_n + (ps + qr + nqs)\mathbf{J}_n.$$

   c) Si p y q son escalares, con $p \neq 0$ y $p + qn \neq 0$, simplificar

$$(p\mathbf{I}_n + q\mathbf{J}_n)\frac{1}{p}\left(\mathbf{I}_n - \frac{q}{p+qn}\mathbf{J}_n\right).$$

3. Suponer que se tienen n observaciones de p variables representadas en la siguiente matriz

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

   a) Mostrar que $\bar{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{1}$. Donde $\bar{\mathbf{x}}_n$ es un vector de dimensión n y con i-ésima entrada

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki}$$

   b) Mostrar que $\mathbf{S}_n = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}'\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{J}_n\right)\mathbf{X}$. Donde $\mathbf{S}_n$ es una matriz cuadrada de dimensión n con ij-ésima entrada

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)$$