Unidad 3

Repaso de álgebra de matrices y probabilidad

Preliminares

Definición (matriz)

Una *matriz* de dimensión $m \times n$ es un arreglo rectangular de números reales con m filas y n columnas:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

a_{ij} es el elemento en intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Notación

Las matrices se escribirán en mayúsculas y negritas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$.

Definición (igualdad de matrices)

Sean $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ dos matrices. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales si tienen la misma dimensión, $m = p$ y $n = q$, y sus entradas correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$.

Preliminares (cont.)

Ejemplo.

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

es de dimensión 2×3, $a_{12} = 4$, $a_{21} = 1$ y a_{32} no tiene sentido.

Definiciones

- Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$ con $m = n$, se dice que $\mathbf{A}$ es *cuadrada*.
- Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ y $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, se dice que $\mathbf{A}$ es *diagonal*.
- Si $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ y $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$ $(i < j)$, se dice que $\mathbf{A}$ es *triangular superior (inferior)*.

Preliminares (cont.)

Sean:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}$ no es cuadrada.
- $\mathbf{B}$ es diagonal.
- $\mathbf{C}$ es triangular superior.
- $\mathbf{D}$ es triangular inferior.

Preliminares (cont.)

Definición (vector)

- Un *vector columna* es una matriz con una sola columna.

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- Un *vector fila* es una matriz con una sola fila.

$$\mathbf{v}'_n = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

v_i, $i = 1, \ldots, n$ es la i-ésima entrada o componente del vector $\mathbf{v}_n$ ($\mathbf{v}'_n$).

Notación

- Los vectores se escribirán en minúsculas y negritas: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$
- Todos los vectores representarán vectores columna.

Preliminares (cont.)

Notación

Sea $\mathbf{A}_{m\times n}$ una matriz.

- $\mathbf{A}_{(i)}$ representa la i-ésima fila de la matriz $\mathbf{A}$, $i = 1, \ldots, m$.
- $\mathbf{A}^{(j)}$ representa la j-ésima columna de la matriz $\mathbf{A}$, $j = 1, \ldots, n$.
- Todos los vectores se representan como vectores columna, es decir, como matrices de dimensión $n \times 1$.

Definición (escalar)

Una matriz con una fila y una columna es llamada *escalar*.

Operaciones básicas

Definición (trasposición)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$, la matriz traspuesta de $\mathbf{A}$ se denota por $\mathbf{A}'$, tiene dimensión $n \times m$ y es tal que las filas de $\mathbf{A}'$ son las columnas de $\mathbf{A}$, es decir:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}'_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La ij-ésima entrada de $\mathbf{A}$ es la ji-ésima entrada de $\mathbf{A}'$.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

* El traspuesto de un vector columna es un vector fila y viceversa.

Matrices particionadas

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Algunas veces es útil particionar las matrices. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc:cc} 1 & 6 & 8 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ \hdashline 9 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Matrices particionadas (cont.)

Si definimos

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos escribir a $\mathbf{A}$ en forma particionada como

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right)$$

Matrices particionadas (cont.)

Definición (Matriz particionada)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$, se puede particionar en rc submatrices, tal que el $\mathbf{A}_{ij}$ sea de dimensión $m_i \times n_j$ para $i = 1, \ldots, r$ y $j = 1, \ldots, c$, donde $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$ y $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$. $\mathbf{A}$ se escribe entonces como

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1c} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2c} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \cdots & \mathbf{A}_{rc} \end{array}\right).$$

En particular, si podemos escribir a $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbf{A}^{(1)} & \cdots & \mathbf{A}^{(n)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbf{A}_{(1)} & \cdots & \mathbf{A}_{(m)} \end{array}\right)'$$

Ejemplo

Si definimos

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc:cc} 1 & 6 & 8 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ \hdashline 9 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right)$$

es fácil verificar que

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} \\ \hdashline \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} \end{array}\right)$$

Resultado

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1c} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2c} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \cdots & \mathbf{A}_{rc} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} & \cdots & \mathbf{A}'_{r1} \\ \hdashline \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} & \cdots & \mathbf{A}'_{r2} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}'_{1c} & \mathbf{A}'_{2c} & \cdots & \mathbf{A}'_{rc} \end{array}\right).$$

Operaciones básicas (cont.)

Definición (traza)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $n \times n$, la traza de $\mathbf{A}$ se denota por $tr(\mathbf{A})$ y se define como la suma de los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}$, es decir:

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad tr(\mathbf{A}) = 1 + 3 - 8 = -4.$$

Resultado

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces $tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}')$.

Definición (suma)

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de dimensión $m \times n$, entonces se define la suma de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Operaciones básicas (cont.)

Resultados

- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de la misma dimensión, entonces

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

- Si además $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas, entonces,

$$tr\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right) = tr\left(\mathbf{A}\right) + tr\left(\mathbf{B}\right)$$

Operaciones básicas (cont.)

Definición (producto escalar)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y c es un escalar, entonces se define el producto de c y $\mathbf{A}$ como

$$c\mathbf{A} = c \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 14 & 6 & -4 \\ 12 & 18 & -16 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Definición (producto de interior)

Si **v** y *vu* son vectores de dimensión n, se define el producto interior de **v** y **u**, denotado $\mathbf{v}'\mathbf{u}$, como

$$\mathbf{v}'\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

El producto interior de dos vectores es un escalar.

Ejemplo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}'\mathbf{u} = (1)(8) + (7)(3) + (6)(2) = 41$$

Producto de matrices (cont.)

Definición (producto de una matriz y un vector)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y vv es un vector columna de dimensión n, entonces se define el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{(1)} \\ \hdashline \mathbf{A}'_{(2)} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline \mathbf{A}'_{(m)} \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{(1)}\mathbf{v} \\ \hdashline \mathbf{A}'_{(2)}\mathbf{v} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline \mathbf{A}'_{(m)}\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

El producto de una matriz de dimensión $m \times n$ y un vector columna de dimensión n es un vector columna de dimensión m.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Av} = \begin{pmatrix} (1)(3) + (3)(2) \\ (2)(3) + (4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices (cont.)

Definición (producto de dos matrices)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de dimensión $n \times p$, entonces se define el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \mathbf{A}\left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} & \cdots & \mathbf{B}^{(p)} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{AB}^{(1)} & \mathbf{AB}^{(2)} & \cdots & \mathbf{AB}^{(p)} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c:c:c}
\mathbf{A}'_{(1)}\mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{A}'_{(1)}\mathbf{B}^{(2)} & \cdots & \mathbf{A}'_{(1)}\mathbf{B}^{(p)} \\ \hdashline
\mathbf{A}'_{(2)}\mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{A}'_{(2)}\mathbf{B}^{(2)} & \cdots & \mathbf{A}'_{(2)}\mathbf{B}^{(p)} \\ \hdashline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline
\mathbf{A}'_{(m)}\mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{A}'_{(m)}\mathbf{B}^{(2)} & \cdots & \mathbf{A}'_{(m)}\mathbf{B}^{(p)}
\end{array} \right)
\end{aligned}
$$

El producto de una matriz de dimensión $m \times n$ y una matriz de dimensión $n \times p$ es una matriz de dimensión $m \times p$.

Producto de matrices (cont.)

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 & 8 \\ 5 & 12 & 4 & 9 \\ 8 & 15 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observación

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de dimensión $n \times p$, entonces:

$$\mathbf{AB} = \left(\mathbf{A}'_{(i)}\mathbf{B}^{(j)}\right)_{m\times p} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times p}$$

Producto de matrices (cont.)

Los siguientes resultados serán de utilidad para hacer inferencias en el modelo de regresión lineal expresado en forma matricial.

Proposición

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de las dimensiones adecuadas, se cumple

- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$.
- $tr\,(\mathbf{AB}) = tr\,(\mathbf{BA})$.

Corolario

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices de las dimensiones adecuadas, entonces

$$tr\,(\mathbf{ABC}) = tr\,(\mathbf{BCA}) = tr\,(\mathbf{CAB})\,.$$

Este resultado generalmente se enuncia como sigue: *la traza de un producto es invariante ante permutaciones cíclicas*.

Comentarios sobre las operaciones matriciales

- La traspuesta de una matriz siempre está definida.
- La traza sólo está definida para matrices cuadradas, es decir, con igual número de filas y columnas.
- La suma de matrices está definida sólo para matrices de la misma dimensión.
- El producto dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ está definido sólo si el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$.
- La dimensión del producto $\mathbf{AB}$ es igual al número de filas de $\mathbf{A}$ por el número de columnas de $\mathbf{B}$.
- La ij-ésima entrada del producto $\mathbf{AB}$ es el producto interior de la i-ésima fila de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'_{(i)}$, y la j-ésima columna de $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{(j)}$.

Vectores y matrices especiales

- *Vector de unos* de dimensión n:

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- *Vector de ceros* de dimensión n:

$$\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz identidad* de dimensión n:

$$\mathbf{I}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Vectores y matrices especiales

- *Matriz de unos* de dimensión $m \times n$:

$$\mathbf{J}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

- *Matriz de ceros* de dimensión $m \times n$:

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Leyes del álgebra de matrices

La suma y producto matricial cumplen con las siguientes propiedades, en todos los casos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{0}$ son matrices de las dimensiones adecuadas

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- En general, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
- Para factorizar expresiones es importante el orden de los productos, por ejemplo $\mathbf{XA} + \mathbf{XB} = \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y $\mathbf{AX} + \mathbf{BX} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}$, pero $\mathbf{XA} + \mathbf{BX}$ y $\mathbf{AX} + \mathbf{XB}$ no son factorizables.

Matrices especiales

Definición (matriz simétrica)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, se dice que $\mathbf{A}$ es simétrica.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 49 & 6 & 7 \\ 6 & 20 & 17 \\ 7 & 17 & 35 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 49 & 6 & 7 \\ 6 & 20 & 17 \\ 7 & 17 & 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

Matrices especiales (continuación)

Definición (matriz idempotente)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$, se dice que $\mathbf{A}$ es idempotente.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(2) + 1(3) - (1)(5) & -2(3) - 3(4) + 3(5) & -2(5) - 3(5) + 5(4) \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

Definición (matriz nilpotente)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y $\mathbf{AA} = 0$, se dice que $\mathbf{A}$ es nilpotente.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5(5) - 15(3) + 2(10) & -3(5) + 3(9) - 2(6) & 2(5) - 3(6) + 2(4) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 = 0$$

Definición (matriz ortogonal)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$, se dice que $\mathbf{A}$ es ortogonal.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AA}' =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{2}{\sqrt{6}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}) & \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}) & -\frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{AA}' = \mathbf{I}$$

Definición (permutación)

Sea $\mathcal{U}_n = \{1, \ldots, n\}$. Una *permutación* de $\mathcal{U}_n$ es una función biyectiva $\sigma : \mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n$. Se denotará por S_n al conjunto de todas las permutaciones de $\mathcal{U}_n$.

Ejemplo

Los elementos S_3 son:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = (1,2,3) & \sigma_2 = (1,3,2) & \sigma_3 = (3,2,1) \\ \sigma_4 = (2,1,3) & \sigma_5 = (2,3,1) & \sigma_6 = (3,1,2) \end{array}$$

Es fácil mostrar que el número de elementos de S_n es $n!$.

Determinantes (cont.)

Definición (inversiones, paridad y signo)

Dada una permutación σ del conjunto $\mathcal{U}_n$, se define el número de *inversiones* de índices i como el número de índices $j > i$ tales que $\sigma(i) > \sigma(j)$. El número total de inversiones de σ se denota por $\varphi(\sigma)$ y se puede calcular como

$$\varphi(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} 1_{\{\sigma(i) > \sigma(j)\}}$$

Si $\varphi(\sigma)$ es impar, se dice que σ es impar, en caso contrario, es par. Por último, El signo se denota por *sign*(σ) y se define como

$$sign(\sigma) = (-1)^{\varphi(\sigma)}$$

Ejemplo

Si consideramos el conjunto S_3, podemos verificar que

$$\begin{array}{lll} \varphi(\sigma_1) = 0 & \varphi(\sigma_2) = 1 & \varphi(\sigma_3) = 3 \\ \varphi(\sigma_4) = 1 & \varphi(\sigma_5) = 2 & \varphi(\sigma_6) = 2 \end{array}$$

Entonces

$$sign(\sigma_1) = 1 \qquad sign(\sigma_2) = -1 \qquad sign(\sigma_3) = -1$$
$$sign(\sigma_4) = -1 \qquad sign(\sigma_5) = 1 \qquad sign(\sigma_6) = 1$$

Determinantes (cont.)

Definición (determinante)

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de dimensión n, se define el determinante de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, denotado por $|\mathbf{A}|$, como:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Ejemplo

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinantes (cont.)

Ejemplo

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$- a_{21}a_{21}a_{33} + a_{12}a32a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Defineción (menor)

Sea **A** una matriz cuadrada de dimensión n. Se define el ij-ésimo *menor* de **A** como la matriz que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de **A**.

Defineción (cofactor)

Sea **A** una matriz cuadrada de dimensión n. Se define el ij-ésimo *cofactor* de **A** como $(-1)^{i+j}$ por el determinante del ij-ésimo menor de **A**.

Determinantes (cont.)

Resultado

Sea **A** una matriz cuadrada de dimensión n. Para $i, j = 1, \ldots, n$ se cumple

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{jk}$$

donde C_{ij} son los cofactores de **A**.

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| &= a_{11} \left| \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| - a_{21} \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + a_{31} \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right| \\
&= a_{11} \left(a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23} \right) - a_{21} \left(a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13} \right) \\
&+ a_{31} \left(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} \right) \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} \\
&+ a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}
\end{aligned}$$

Propiedades de los determinantes

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de dimensión n y c es un escalar, entonces se cumple

- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$.
- Si se intercambian de lugar dos columnas o dos filas de $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ ~~no se modifica.~~
- Si dos columnas o dos filas de $\mathbf{A}$ son iguales, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
- $|c\mathbf{A}| = c^n |\mathbf{A}|$.
- Si se multiplica por c una columna o fila de $\mathbf{A}$, entonces el determinante se también se multiplica por c.
- Si a una columna o fila de $\mathbf{A}$ se le suma un múltiplo de otra columna o fila de $\mathbf{A}$, el determinante no se multiplica.
- Si $\mathbf{B}$ es una matriz cuadrada de dimensión n, entonces $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$.
- Si $\mathbf{A} = diag(a_1, \ldots, a_n)$, entonces $|\mathbf{A}| = a_1 \ldots a_n$.

Matrices inversas

Definición (matriz inversa)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de dimensión n. Si existe una matriz $\mathbf{B}$ de dimensión n tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

se dice que $\mathbf{A}$ es invertible y que $\mathbf{B}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$, que se denota $\mathbf{A}^{-1}$.

Ejemplo

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es fácil verificar que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz

Definición (matriz adjunta)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de dimensión n, se define la matriz adjunta de $\mathbf{A}$, denotada por $adj\left(\mathbf{A}\right)$, como

$$adj\left(\mathbf{A}\right) = \left(C_{ji}\right)_{n\times n}$$

donde C_{ji} es el ji-ésimo cofactor de $\mathbf{A}$. Es decir, la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ es la traspuesta de la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$.

Proposición

Si $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de dimensión n y $adj\left(\mathbf{A}\right)$ su matriz adjunta, entonces

$$\mathbf{A}adj\left(\mathbf{A}\right) = adj\left(\mathbf{A}\right)\mathbf{A} = diag\left(\left|\mathbf{A}\right|, \ldots, \left|\mathbf{A}\right|\right)$$

Cálculo de la inversa de una matriz (cont.)

Resultado

Si $\mathbf{A}$ es cuadrada de dimensión n, entonces $\mathbf{A}$ es invertible si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$, además

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj\left(\mathbf{A}\right).$$

Ejemplo

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que $|\mathbf{A}| = 2$. Entonces, $\mathbf{A}$ es invertible. $M_{11} = 2$, $M_{12} = 1$, $M_{21} = 4$ y $M_{22} = 3$. Luego, la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada no singular. $\mathbf{A}^{-1}$ cumple con las siguientes propiedades.

a) $\mathbf{A}^{-1}$ es única.
b) $\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = |\mathbf{A}|^{-1}$.
c) $\mathbf{A}^{-1}$ es no singular.
d) La inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ es $\mathbf{A}$.
e) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = (\mathbf{A}')^{-1}$.
f) Si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también lo es.
g) Si $\mathbf{B}$ es no singular, entonces $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Matrices inversas

Casos especiales

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
- Si $\mathbf{D} = diag\left(d_1, \ldots, d_n\right)$, con $d_i \neq 0$, entonces $\mathbf{D}^{-1} = diag\left(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}\right)$.
- Si $\mathbf{P}$ es una matriz ortogonal, entonces $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$.
- Si $a \neq 0$ y $a + bn \neq 0$, entonces

$$(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)^{-1} = \frac{1}{a}\left(\mathbf{I}_n - \frac{b}{a+bn}\mathbf{J}_n\right)$$

Combinación lineal

Definición (combinación lineal)

Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ vectores de la misma dimensión. Se dice que el vector $\mathbf{u}$ es *combinación lineal* CL de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ si existen escalares $a_1, \ldots, a_p$ tales que

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots a_p\mathbf{v}_p.$$

Ejemplo

Si $\mathbf{X}$ es una matriz de dimensión $m \times n$, $\mathbf{a}$ un vector de dimensión n y $\mathbf{b}$ un vector dimensión m, entonces $\mathbf{Xa}$ es CL de las columnas de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{b}'\mathbf{X}$ es (CL) de las filas de $\mathbf{X}$.

Combinación lineal

Definición (independencia lineal)

Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ vectores de la misma dimensión. Se dice que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es *linealmente independiente* (LI) si y sólo si

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

si y sólo si $a_1 = \ldots = a_p = 0$. Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* (LD) si no es LI.

Si un conjunto de vectores es LD, entonces, alguno de ellos es $\mathbf{0}$ o es CL del resto de los vectores.

Proposición

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de dimensión n. Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_n$, para algún vector $\mathbf{x}$ de dimensión n distinto de $\mathbf{0}_n$, entonces $|A|$.

La demostración de la proposición anterior es muy sencilla. Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_n$ para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, significa que alguna de las columnas de $\mathbf{A}$ es igual $\mathbf{0}_n$ o bien es CL del resto de las columnas.

Rango

Proposición

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de dimensión $m \times n$. El máximo número de columnas LI de $\mathbf{A}$ es igual al máximo número de filas LI de $\mathbf{A}$.

Definición (rango)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de dimensión $m \times n$, se define el rango de $\mathbf{A}$ como el máximo número de columnas (o filas) LI de $\mathbf{A}$ y se denota por $r(\mathbf{A})$. Se define $r(\mathbf{0}) = 0$.

Rango

Propiedades del rango

- $r(\mathbf{A})$ es un entero positivo, excepto si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, en cuyo caso $r(\mathbf{A}) = 0$.
- Si $\mathbf{A}$ es de dimensión $m \times n$, entonces $r(\mathbf{A}) \leq m, n$.
- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada de dimensión n y $r(\mathbf{A}) = n$, entonces $\mathbf{A}$ es no singular y por lo tanto invertible.
- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada de dimensión n y $r(\mathbf{A}) < n$, entonces $\mathbf{A}$ es singular y no invertible.
- Si $\mathbf{A}$ es de dimensión $m \times n$ y $r(\mathbf{A}) = m < n$, se dice que $\mathbf{A}$ es de rango completo por filas.
- Si $\mathbf{A}$ es de dimensión $m \times n$ y $r(\mathbf{A}) = n < m$, se dice que $\mathbf{A}$ es de rango completo por columnas.
- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada de dimensión n y $r(\mathbf{A}) = n$, se dice que $\mathbf{A}$ es de rango completo.

Proposición

- Si $\mathbf{A}$ es de rango completo por columnas, entonces $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es de rango completo.
- Si $\mathbf{B}$ es de rango completo por filas, entonces $\mathbf{B}\mathbf{B}'$ es de rango completo.

Definición (matrices definidas)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz real simétrica de dimensión n. Si para todo $\mathbf{x}$ de dimensión n y $\mathbf{x} \neq 0$:

1. $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, entonces se dice que $\mathbf{A}$ es positiva definida;
2. $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$, entonces $\mathbf{A}$ es negativa definida;

Si $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ es positivo para algunos valores de $\mathbf{x}$ y negativo para otros, se dice que $\mathbf{A}$ es indefinida.

Proposición

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones.

- Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{x}$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}.$$

- $\bigtriangledown (f+g)(\mathbf{x}) = \bigtriangledown f(\mathbf{x}) + \bigtriangledown g(\mathbf{x})$.
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{x}$, entonces

$$\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.$$

- Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n, entonces:

$$\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}'\mathbf{a}.$$

- $\bigtriangledown (fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \bigtriangledown g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \bigtriangledown f(\mathbf{x})$.

Cálculo diferencial

- Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces

$$\triangledown f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{x}.$$

- En el resultado anterior, si $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces

$$\triangledown f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Definiciones

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{z} \in D$.

1. Si existe una vecindad $N_{\mathbf{z}} \subset D$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z})$, para todo $\mathbf{x} \in N_{\mathbf{z}}$, se dice que f tiene en $\mathbf{z}$ un máximo local.
2. Si existe una vecindad $N_{\mathbf{z}} \subset D$ tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{z})$, para todo $\mathbf{x} \in N_{\mathbf{z}}$, se dice que f tiene en $\mathbf{z}$ un mínimo local.
3. Si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z})$, para todo $\mathbf{x} \in D$, se dice que f tiene un máximo absoluto en $\mathbf{z}$.
4. Si $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{z})$, para todo $\mathbf{x} \in D$, se dice que f tiene un mínimo absoluto en $\mathbf{z}$.

Cálculo diferencial

Definición (puntos críticos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con derivadas parciales en $D' \subset D$ tal que

$$\bigtriangledown f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}_n.$$

con $\mathbf{z} \in D'$. Se dice que $\mathbf{z}$ es un punto critico (o estacionario) de f.

Teorema (condiciones necesarias)

Sea f como en la definición anterior. Si f tiene un valor extremo en $\mathbf{z} \in D'$, entonces $\mathbf{z}$ es un punto crítico de f.

El reciproco del teorema anterior no es verdadero, pero se pueden dar condiciones en las que en punto crítico una función tiene un valor extremo.

Definición (matriz hessiana)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con segundas derivadas parciales en $D' \subset D$. Se define la *matriz hessiana* de f como

$$H(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}.$$

Teorema (criterio de las segundas derivadas parciales)

Sea f como en la definición anterior y $\mathbf{z} \in D'$ un punto critico de f. Entonces:

1. Si $H(\mathbf{z})$ en positiva definida, entonces f tiene un mínimo en $\mathbf{z}$.
2. Si $H(\mathbf{z})$ es negativa definida, entonces f tiene un máximo en $\mathbf{z}$.
3. Si $H(\mathbf{z})$ es indefinida, entonces f tiene un punto silla (*saddle point*) en $\mathbf{z}$.

Vectores aleatorios

Definición (Vector aleatorio)

Se dice que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ *es un vector aleatorio en* $\mathbb{R}^n$ *si cada componente de este vector* X_i *es una variable aleatoria real*

Definición (Función de distribución)

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ *un vector aleatorio en* $\mathbb{R}^n$*. La función de distribución de* $\mathbf{X}$ *se define como*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots .x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

Vectores aleatorios (cont.)

Función de densidad

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$.

- Si cada componente de $\mathbf{X}$ es una v.a. discreta, se define la densidad de $\mathbf{X}$ como la función $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n).$$

  para cualquier $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Si cada componente de $\mathbf{X}$ es una v. a. (absolutamente) continua, se define la densidad de $\mathbf{X}$ como la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$P(\mathbf{X} \in D) = \int_D f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\mathbf{x},$$

  para cualquier* conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Momentos de los vectores aleatorios

Definición

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$. Se define la esperanza de $\mathbf{X}$ como el vector

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n))'$$

Se define la varianza del vector $\mathbf{X}$ como matriz

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) &= E\left((\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))'\right) \\ &= \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \ldots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \ldots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \ldots & V(X_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observación: Se puede mostrar que $V(\mathbf{X})$ es una matriz simétrica y positiva definida.

Propiedades de los vectores aleatorios

Proposición

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada constante de dimensión n, $\mathbf{a}$ un vector constante de dimensión n y $\mathbf{X}$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$ tal que $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ y $V(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$

- $E(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}$.
- $E(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$.
- $V(\mathbf{a}'\mathbf{X}) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$.
- $V(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}'$.
- $E(\mathbf{X}'\mathbf{AX}) = tr(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$.

La distribución normal multivariada

Distribución normal univariada

Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En símbolos $X \sim N(\mu, \sigma)$.

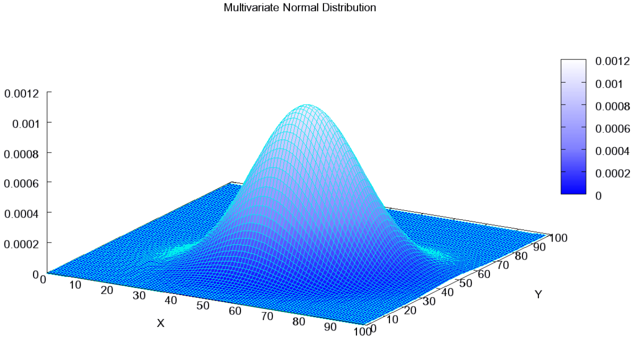
Distribución normal multivariada

Un vector aleatorio $\mathbf{X}$ en $\mathbb{R}^p$ tiene una distribución normal p-variada con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, con $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ simétrica y positiva definida de dimensión p, si su densidad está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p.$$

En símbolos, $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Normal multivariada y sus propiedades



La distribución normal multivariada

Resultado

Si $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de dimensión $m \times p$ de rango completo, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}').$$

Del resultado anterior se siguen las siguiente conclusiones:

- La i-ésima componente de $\mathbf{X}$ sigue una distribución normal univariada com media μ_i y varianza σ_i^2, donde μ_i es la i-ésima componente $\boldsymbol{\mu}$ y σ_i^2 es la i-ésima componente de la diagonal de $\boldsymbol{\Sigma}$.
- Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{a}'\mathbf{X}$ tiene distribución normal univariada con media $\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}$ y varianza $\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$.
- Si $\mathbf{A}$ es de dimensión $q \times p$ con $1 < q < p$ tal que

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_{q\times q} & \mathbf{0}_{q\times(p-q)} \end{array} \right),$$

entonces $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$, donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hdashline \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array} \right).$$