Regresión múltiple y otras técnicas multivariadas | Semestre 2018-2

Tareas 6 y 7

Fecha de entrega: 19 de abril

Álgebra lineal y matrices

1. Escribir las siguientes matrices.

   a) $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, donde $a_{ij} = i + j$, para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2$.

   b) $\mathbf{B} = \{b_{kt}\}$, donde $b_{kt} = k^{t-1}$, para $k = 1, \ldots, 4$ y $t = 1, 2, 3$.

   c) $\mathbf{C} = \{c_{rs}\}$, donde $c_{rs} = 3r - 2(s-1)$. para $r = 1, \ldots, 4$ y $s = 1, \ldots, 5$.

2. Para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcular $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{A}'\mathbf{B}$.

   b) Calcular $(\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{B}$ y verificar que el resultado es igual a $\mathbf{AB} + \mathbf{A}'\mathbf{B}$.

   c) Calcular $\mathbf{BB}'$ y $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ y verificar que $\operatorname{tr}(\mathbf{BB}') = \operatorname{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{B})$.

   d) Calcular $\mathbf{Bx}$, $\mathbf{B}'\mathbf{Bx}$, $\mathbf{x}'\mathbf{B}'\mathbf{Bx}$, $(\mathbf{Bx})'(\mathbf{Bx})$ y verificar que $\mathbf{x}'\mathbf{B}'\mathbf{Bx} = (\mathbf{Bx})'(\mathbf{Bx})$.

   e) Calcular $\mathbf{Ay}$, $\mathbf{A}'\mathbf{Ay}$, $\mathbf{y}'\mathbf{A}'\mathbf{Ay}$, $(\mathbf{Ay})'(\mathbf{Ay})$ y verificar que $\mathbf{y}'\mathbf{A}'\mathbf{Ay} = (\mathbf{Ay})'(\mathbf{Ay})$.

   f) Verificar que $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 9\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

3. Para

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix},$$

   calcular $\mathbf{X}^2$, $\mathbf{Y}^2$, $\mathbf{XY}$, $\mathbf{YX}$ y verificar que

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{XY} + \mathbf{YX} + \mathbf{Y}^2.$$

4. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

   mostrar que $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$ aún cuando $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

5. Sean p y q números reales positivos tales que $p+q=1$. Se definen las matrices

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ 0.5p & 0.5 & 0.5q \\ 0 & p & q \end{bmatrix},$$

Mostrar lo siguiente:

a) $\mathbf{P} = \mathbf{1}_3 \begin{bmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{P}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_3$.

c) $\mathbf{T}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_3$.

d) $\mathbf{PT} = \mathbf{P} = \mathbf{TP}$.

e) $\mathbf{T}^2 = 0.5(\mathbf{P}+\mathbf{T})$.

f) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

6. Para $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ de dimensión n y números reales p, q, r, s tales que $p \neq 0$ y $p + nq \neq 0$:

a) Escribir la matriz $p\mathbf{I} + q\mathbf{J}$ para $n = 4$.

b) Mostrar que $(p\mathbf{I} + q\mathbf{J})(r\mathbf{I} + s\mathbf{J}) = pr\mathbf{I} + (ps + qr + nqs)\mathbf{J}$.

c) Simplificar

$$(p\mathbf{I} + q\mathbf{J})\frac{1}{p}\left(\mathbf{I} - \frac{q}{p+nq}\mathbf{J}\right).$$

d) Explicar por qué $\mathbf{JXJ} = x_{..}\mathbf{J}$, donde $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ es una matriz cuadrada de dimensión n y $x_{..}$ es la suma de las entradas de $\mathbf{X}$, es decir, $x_{..} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

e) Probar que $\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{J}$ es idempotente pero $\mathbf{I} - \mathbf{J}$ no lo es.

7. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de dimensión $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector de dimensión n.

a) Mostrar que el determinante de $\mathbf{x}\mathbf{1}_n'$ es 0.

b) Si $\mathbf{A}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, explicar por qué $|\mathbf{A}| = 0$.

8. Explicar por qué el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal. ¿Sucede lo mismo con las matrices triangulares superiores o inferiores? Dar un ejemplo de cada caso.

9. Sin calcular los determinantes, sugerir valores de x que satisfagan las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

c) $\begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$

d) $\begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$

10. *a*) Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, calcular $|\mathbf{A}|$ y $\mathbf{A}^{-1}$ y verificar que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

    b) Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$, calcular $|\mathbf{B}|$ y $\mathbf{B}^{-1}$ y verificar que $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$.

11. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

    a) Calcular $\mathbf{A}^{-1}$ y la inversa de $\mathbf{A}'$. Verificar que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = (\mathbf{A}')^{-1}$.

    b) Calcular la inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ y verificar que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.

12. Para $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, mostrar lo siguiente

    a) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente dependientes y encontrar la relación lineal entre ellos.

    b) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_4$ son linealmente independientes y encontrar la relación lineal de ellos que es igual al vector $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}'$, para cualesquiera números reales a, b y c.

Probabilidad

13. Se lanzan dos dados balanceados. Encontrar la función masa de probabilidades conjunta de X y Y en cada caso.

    a) X es el valor más grande y Y es la suma de los valores obtenidos.

    b) X es el valor del primer dado y Y es el valor más grande.

    c) X es el menor valor y Y es el valor más grande.

14. Se sabe que un lote con cinco transistores contiene tres defectuosos. Los transistores son probados uno a la vez hasta que se identifica a los defectuosos. Sean N_1 el número de pruebas realizadas hasta que se encuentra el primer transistor defectuoso y N_2 el número de pruebas adicionales hasta que se encuentra el segundo transistor defectuoso.

a) ¿Cuáles son los posibles valores de N_1 y de N_2?

b) Encontrar la función masa de probabilidades conjunta de N_1 y N_2.

c) Encontrar las funciones masa de probabilidades marginales de N_1 y N_2.

d) ¿Son N_1 y N_2 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.

e) Calcular $Cov(N_1, N_2)$ y $Cor(N_1, N_2)$.

15. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & \text{si } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de k tal que $f(x,y)$ es realmente una función de densidad bivariada.

b) Encontrar las funciones de densidad marginales de X y Y.

c) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.

d) Calcular $\text{Cov}(X,Y)$ y $\text{Cor}(X,Y)$.

16. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} kx\exp\left\{-(x+y)\right\}, & \text{si } x > 0, \quad y > 0, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de k tal que $f(x,y)$ es realmente una función de densidad bivariada.

b) Encontrar las funciones de densidad marginales de X y Y.

c) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.

d) Encontrar la función de densidad condicional de X dado $Y = y$, para cualquier $y > 0$.

e) Encontrar la función de densidad condicional de Y dado $X = x$, para cualquier $x > 0$.

f) Calcular $\text{Cov}(X,Y)$ y $\text{Cor}(X,Y)$.

17. Suponer que X y Y son variables aleatorias continuas independientes. Mostrar que

a) $\Pr\left\{X + Y \leq a\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy$.

b) $\Pr\left\{X \leq Y\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$.

18. Si X y Y son variables aleatorias idénticamente distribuidas, no necesariamente independientes, mostrar que

$$\text{Cov}(X+Y, X-Y) = 0.$$

19. Sean X y Y variables aleatorias. A partir de la definición de varianza de una variable aleatoria, mostrar que

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).$$

20. Sean X, Y y Z variables aleatorias y k una constante. A partir de la definición de covarianza, mostar las siguientes igualdades.

   a) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

   b) $\text{Cov}(kX, Y) = k\text{Cov}(X, Y)$.

   c) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$.

21. Sean X y Y variables aleatorias tales que $V(X) = \sigma_X^2$ y $V(Y) = \sigma_Y^2$.

   a) A partir de $V\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$, mostrar que $\text{Cor}(X, Y) \geq -1$.

   b) A partir de $V\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$, mostrar que $\text{Cor}(X, Y) \leq 1$.

   c) Usando el resultado que $V(Z) = 0$ implica que Z es constante, justificar que si $\text{Cor}(X, Y) = 1$ o -1, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

   $$Y = a + bX,$$

   donde el signo de b depende del signo de $\text{Cor}(X, Y)$.

Referencias

- Ross, S. (2009). *Probability and statistics for engineers and scientists*, 4ta edición. Academic Press, San Diego.
- Searle, S. (1982). *Matrix algebra useful for statistics.* Wiley, New York.