



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Teorema de Kesten sobre
Percolación de Aristas en el Plano

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Laura Clementina Eslava Fernández

DIRECTOR DE TESIS:

Gerónimo Uribe Bravo

Abril de 2010



1. Datos del alumno
Eslava
Fernández
Laura Clementina
56 96 54 46
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303557485
2. Datos del tutor
Dr.
Uribe
Bravo
Gerónimo
3. Datos del sinodal 1
Dra.
Meda
Guardiola
Ana
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Gómez
Aíza
Ricardo
5. Datos del sinodal 3
Dra.
Caballero
Acosta
María Emilia
6. Datos del sinodal 4
Dra.
Fernández
Fernández
María Asunción Begoña
7. Datos del trabajo escrito
El teorema de Kesten sobre percolación de aristas en el plano
91 p.
2010

Agradecimientos

La conclusión de esta tesis marca el término de una importante etapa en mi vida, la obtención de un grado de licenciatura. Durante el desarrollo de este trabajo pude observarme y conocerme como la persona que se ha formado a través de estos 4 años, me di cuenta de lo que realmente se requiere para terminar una carrera. No ha sido fácil, pero esto no hubiera sido posible sin el apoyo, cariño y enseñanzas de todas las personas que me rodean y me quieren.

Agradezco a mis padres, el mayor modelo a seguir en mi vida, ejemplo de honestidad, compromiso y amor, por el gran esfuerzo y dedicación que me han brindado durante toda mi vida y por confiar y apoyarme en mis decisiones.

A mi mamá, por la confianza incondicional que ha tenido en mí y por hacer siempre todo lo que está en sus manos para sacarme adelante.

A mi papá, por darme libertad de expresarme y de tomar mis propias decisiones y al mismo tiempo permanecer cerca, apoyándome.

A Paco, que siempre me protegió y me motivó a luchar por mis convicciones y mis sueños.

A Talina, por ser una amiga incondicional, por su alegría y buen humor y por su paciencia y buenos consejos.

A toda mi familia y amigos, por rodearme de amor y confianza, por compartir conmigo alegrías, sueños y muchas experiencias que son parte de lo que hasta ahora me siento orgullosa de ser.

A mis maestros, por formarme como persona crítica y comprometida y a los profesores de la facultad, por contagiarme su pasión por las matemáticas.

A Gerónimo, por confiar en mis capacidades, formar mi carácter como investigadora y ser un modelo a seguir de buen trabajo y calidad.

A Memo, por compartir siempre su entusiasmo por la vida. Por interesarse en lo que hago sin importar cuán complicado y sin sentido parezca.

Índice general

Prefacio	1
Capítulo 1. Elementos de Teoría de Gráficas	5
1. Conceptos Básicos	5
2. Retículas \mathbb{L}_d y Dualidad en \mathbb{L}_2	9
Capítulo 2. Elementos de la Teoría de Probabilidad	19
1. Espacios Medibles y Clases	19
2. Variables Aleatorias	23
3. Independencia	29
Capítulo 3. El Modelo de Percolación	35
1. Extensión de Carathéodory	35
2. Percolación y Acoplamiento	39
Capítulo 4. Umbrales	49
1. Frontera y Conjunto Esencial	52
2. Medida de la Frontera y Umbrales	55
3. Cotas para la Medida de la Frontera	60
4. El Teorema sobre Umbrales de Russo	67
Capítulo 5. El Teorema de Harris y Kesten	71
1. El Umbral de la Probabilidad Percolación de Aristas en Retículas	71
2. Cotas para la Probabilidad de Cruce de Rectángulos	75
Guía Notacional	89
Bibliografía	91

Prefacio

Los primeros trabajos sobre percolación se publicaron en 1957, cuando el inglés S.R. Broadbent, que se dedicaba a la elaboración de caretas antigás para las minas, se encontró con el siguiente problema:

“El gas debe pasar a través del carbón, penetrando los poros de éste y sedimentándose en sus paredes. Los poros se unen unos con otros de manera extraña, formando laberintos intrincados, de modo que si éstos son bastante anchos y bien enlazados entre sí, el gas penetra profundamente en el filtro de carbón. De lo contrario, el gas no logra penetrar más allá de la superficie.”

Este fenómeno, que difiere considerablemente de los fenómenos de difusión que se conocían, interesó al matemático J.M. Hammersley y ambos científicos trabajaron juntos en los nuevos procesos que llamaron de *percolación*, que en inglés significa infiltración. Sus aplicaciones pronto se multiplicaron, desde el estudio de las propiedades eléctricas de semiconductores con impurezas [Efr94] hasta propiedades de catalizadores, polímeros y sistemas biológicos [Sah94].

Los modelos que estudia la percolación de aristas se idealizan de la siguiente manera:

Se tiene un sistema de celdas dispuestas en dos o tres dimensiones de forma regular, en retículas cuadradas, hexagonales o ramificaciones. Estas celdas se unen por caminos que están abiertos o cerrados con cierta probabilidad p ; y se hace entrar por estos caminos un *gas* que recorre todos los caminos abiertos posibles (en todas las direcciones posibles.)

La percolación estudia todo lo relacionado con los caminos a los que el gas tuvo acceso. Es claro que si la probabilidad de tener caminos abiertos es cero entonces el gas no puede penetrar en el sistema; mientras que asignando probabilidad 1 de tener caminos abiertos, el gas utiliza todos los caminos y llega a cada celda del sistema, por cualquier camino posible.

La primera pregunta que se trató de responder es: ¿Cuál es la probabilidad crítica a partir de la cual el gas se extiende por todo el sistema?

Es decir, buscamos un punto en donde, a pesar de que la probabilidad de tener caminos abiertos no es trivial, las regiones del sistema que pueden alcanzarse desde una celda determinada se extiendan a lo largo de todo el sistema, que se considera infinito.

En 1959, Harris dió una cota inferior para esta probabilidad crítica en el caso de la retícula cuadrada de dimensión 2 y por mucho tiempo se conjeturó que la cota de $p = 1/2$, efectivamente, era la probabilidad crítica; pero sólo hasta 1980 Kesten logró demostrarlo.

El objetivo de la tesis es desarrollar todas las herramientas necesarias para presentar la demostración completa del teorema de Harris y Kesten que desarrollaron Bollobás y Riordan en [BB06b] y [BB07]; además que es una buena representación de las técnicas que se utilizan en el estudio de la percolación; para esto, se dividió el trabajo en 5 capítulos:

En el primer capítulo se presentan las definiciones generales de la teoría de gráficas y propiedades de graficas planas, se puede consultar [Bol98] y se demuestran propiedades de las componentes conexas de la retícula plana \mathbb{L}_2 que serán clave para el estudio de la percolación, las demostraciones se obtuvieron de [BB06a].

El objetivo del segundo capítulo es dar una demostración formal de la Ley 0-1 de Kolmogorov para variables aleatorias independientes, además de introducir los conceptos necesarios para trabajar los modelos de percolación como espacios de probabilidad con una infinidad de variables aleatorias independientes.

El tercer capítulo se dedica a justificar la construcción de un espacio de probabilidad adecuado para los modelos de percolación. En [Bil95], [Gal95] y [Bau95] se dan construcciones para este tipo de espacios haciendo énfasis en distintos aspectos, pero todas ellas apoyándose en el método de extensión de Carathéodory [Bar95]. La construcción que aquí se presenta fue adaptada para utilizar solamente variables de tipo Bernoulli.

El cuarto capítulo se dedica por completo al estudio de los umbrales de eventos crecientes del espacio construido anteriormente. Se exponen varios resultados en torno a éstos, como el lema de Harris, que demuestra la correlación positiva entre eventos crecientes y la fórmula de Margulis-Russo [BB06a]; con el manejo del concepto de frontera de un evento se da la demostración de la ley de aproximación a 0-1 de Russo, [Rus82] que relaciona la medida de la frontera de un evento creciente con el umbral de su probabilidad.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan cotas para la probabilidad crítica de percolación en retículas cuadradas de cualquier dimensión y se define el evento de tener un cruce de rectángulo. Con ayuda de la autodualidad de la retícula plana se obtienen cotas

PREFACIO

de la probabilidad de dichos cruces, que junto con el lema de Harris forman la base de la demostración del teorema de Harris; mientras que una aplicación de la ley de aproximación a 0-1 es la clave para la demostración del teorema de Kesten.

Elementos de Teoría de Gráficas

La intención de este capítulo es presentar los conceptos de la teoría de gráficas que son necesarios para estudiar los modelos de percolación; nuestro principal objeto de estudio serán las componentes conexas de subgráficas de la retícula \mathbb{L}_2 cuyas aristas se han elegido al azar. Por lo tanto, necesitamos conocer los elementos de las retículas que utilizaremos, así como las propiedades que tiene \mathbb{L}_2 por ser una gráfica plana isomorfa a su dual, estas propiedades son una pieza clave para desarrollar las técnicas de percolación en el plano.

1. Conceptos Básicos

El concepto principal que debemos entender de una gráfica es cómo se forman sus componentes conexas; éstas surgen a partir de la idea de que los vértices se comunican unos con otros creando caminos. La estructura de estas componentes depende en gran medida de que todos los vértices tengan una cantidad finita de vecinos; de este modo, tener una gran cantidad de vértices comunicados entre sí es equivalente a encontrar caminos largos.

Una **gráfica** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de **vértices** y otro E de **aristas**. Una arista $e = (u, v)$ es un par no ordenado de vértices y se dice que e une a u y v , que u y v son los extremos de e o que u es adyacente a v . La **gráfica inducida** por un conjunto $V' \subset V$ se obtiene de considerar sólo los vértices de V' y todas las aristas con extremos en esos vértices. En general nos referiremos a gráficas no orientadas; en caso de que se le de una dirección a la pareja de vértices que determinan una arista, se habla de **flechas** y se denota $\vec{f} = \overrightarrow{uv}$ a la flecha que va de u hacia v .

Un **camino** \mathcal{P} de longitud n es una sucesión de vértices $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ tal que v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $0 \leq i < n$. Dos clases importantes de caminos son las **trayectorias**, que no repiten vértices y los **ciclos**, cuyo primer y último vértice son los únicos que coinciden.

Si para dos vértices $u, v \in V$ existe un camino $\mathcal{P} = (v_0 = u, \dots, v_n = v)$, entonces se dice que u está **comunicado** con v ($u \rightarrow v$); y si sólo sabemos que a partir de

un vértice $v \in V$ existe una trayectoria de longitud $n \in \mathbb{N}$ lo denotamos $v \rightarrow n$. Esto permite dar una métrica a G . Para cualesquiera dos vértices u, v , definimos su **distancia** como la longitud del camino más corto que los comunica.

PROPOSICIÓN 1.1. *Si una gráfica $G = (V, E)$ tiene todos sus vértices comunicados entre sí, entonces la función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida a continuación es una métrica.*

$$d(u, v) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{Existe un camino de } u \text{ a } v \text{ de longitud } n\}.$$

DEMOSTRACIÓN. La distancia así definida nunca es negativa. Luego, los caminos degenerados $\mathcal{C} = (v)$ tienen longitud cero y muestran que la distancia de un vértice a sí mismo es cero y si la distancia entre dos vértices es cero, entonces son el mismo vértice.

Por cada camino $\mathcal{C} = (u, v_1, \dots, v_{n-1}, v)$ de u a v , se puede construir otro camino $\mathcal{C}' = (v, v_{n-1}, \dots, v_1, u)$ de v a u con la misma longitud. Así, si \mathcal{C} tiene longitud mínima entonces \mathcal{C}' también, es decir, la distancia es simétrica.

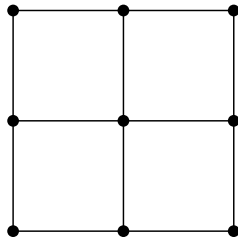
Finalmente, se cumple la desigualdad del triángulo porque dados tres vértices $u, v, w \in V$, cualquier camino que comunique a u con v se puede unir a otro que comunique a v con w para formar un camino de u a w , la longitud del camino que resulte será igual a la suma de los dos caminos originales. Tomando dos caminos de longitud mínima podemos construir un camino que va de v a w y cuya longitud es mayor que la distancia entre v y w ,

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

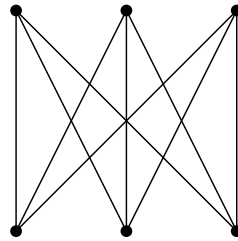
□

En general, una gráfica se divide en conjuntos de vértices que están totalmente comunicados unos con otros y surge el concepto de **componente conexa**, que es la gráfica inducida por un conjunto maximal de vértices que están todos comunicados entre sí. Notemos que si $u \rightarrow v$ entonces sus componentes conexas coinciden, de modo que podemos denotar \mathcal{C}_v a una componente conexa con cualquier vértice v en ella, teniendo en cuenta que $\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_v$, para toda $u \in \mathcal{C}_v$.

Una **gráfica** $G = (V, E)$ es **plana** si sus vértices son puntos en el plano, cada arista se considera un arco en \mathbb{R}^2 con extremos en los vértices que la determinan y además de sus propios extremos, una arista no contiene ningún vértice ni cualquier otro punto de una arista distinta y las **caras** corresponden a cada región aislada que se forma en \mathbb{R}^2 . Las **gráficas no aplanables** son aquéllas que no pueden ser representadas como una gráfica plana, entonces sin importar cómo se coloquen los vértices en el plano, ni



(a) Gráfica Plana



(b) Gráfica no aplanable

FIGURA 1. Dos tipos de gráficas

cómo se dibujen las aristas, siempre podemos encontrar al menos dos aristas que se intersectan sin cumplir la condición de arriba.

Un ejemplo de gráfica no aplanable es la $K_{3,3}$ que consta de 6 vértices y 9 aristas como en la Figura 1(b). Notemos que $K_{3,3}$ tiene sólo ciclos de longitud par, así que si fuera aplanable cada cara estaría delimitada por un ciclo de longitud mayor a 4 y cada arista estaría en exactamente dos caras. De modo que al sumar el número de aristas por cada cara estamos contando dos veces el número de aristas y por lo menos 4 aristas por cada cara, así

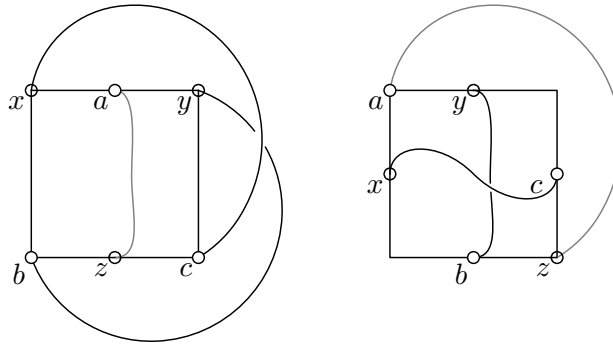
$$4F \leq 2E;$$

esto, junto con la fórmula de Euler, $V - E + F = 2$, nos lleva a una contradicción; por lo que la gráfica $K_{3,3}$ no es aplanable.

TEOREMA 1.2 (Fórmula de Euler). *Consideremos una gráfica plana conexa y finita G . Si denotamos por V , E y F al número de vértices, aristas y caras de G respectivamente; entonces*

$$V - E + F = 2.$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una gráfica G con V vértices, E aristas y F caras. Usamos inducción sobre el número de ciclos de una gráfica. Si una arista e forma parte de un ciclo entonces está separando dos caras de la gráfica y considerando una gráfica G' con los mismos vértices y aristas pero sin la arista e , tendremos una arista menos pero también una cara menos. Así que la gráfica G cumplirá la fórmula de Euler si y sólo si la gráfica G' lo hace. Sólo falta probar la base de inducción.



(a) Las trayectorias se encuentran en el exterior del ciclo (b) Las trayectorias se encuentran en el interior del ciclo

FIGURA 2. Dos trayectorias que unen vértices de un ciclo como en las figuras deben intersectarse.

También es fácil probar por inducción sobre el número de aristas que una gráfica conexa sin ciclos tiene una arista menos que el número de vértices; con esto, si la gráfica G no tiene ciclos, entonces sólo se forma una región en el plano. Teniendo así V vértices, $V - 1$ aristas y 1 cara, satisfaciendo la fórmula de Euler.

Para la segunda inducción es muy importante que sea conexa, así cuando se tienen dos vértices es necesario que exista la única arista posible. Y si hay n vértices y ningún ciclo, entonces al menos uno de los vértices tiene sólo una arista; al remover ese vértice con su respectiva arista reducimos en uno el número de vértices y de aristas, esto prueba el paso inductivo. \square

Al trabajar en el plano obtenemos información sobre el tipo de subgráficas que no pueden existir. Supongamos que tenemos un ciclo con al menos 4 vértices que se recorren en el orden: x, y, c, b . Y que existen trayectorias que unen a x con c y a y con b ; entonces si ambas trayectorias se encuentran en la misma región del plano que genera el ciclo, será necesario que éstas se intersecten.

Para entenderlo mejor, ver Figuras 2(a) y 2(b), consideremos gráficas simplificadas en donde el ciclo conste sólo de 6 vértices: $axbzcya$ y como aristas, las que forman el ciclo, cada trayectoria como una sola arista y la arista az que representa la idea de que las trayectorias se encuentran en la otra región del ciclo. Esta gráfica es $K_{3,3}$, de modo que si las aristas xc y yb no se intersectaran, entonces $K_{3,3}$ sería aplanable.

Este razonamiento será útil cuando nos encontremos con situaciones que se pueden ajustar a este modelo: dadas dos trayectorias contenidas en una misma región del plano,

dispuestas como en la Figura 2 sucede que ó las trayectorias se intersectan ó alguna de ellas no existe.

2. Retículas \mathbb{L}_d y Dualidad en \mathbb{L}_2

Si bien el modelo de percolación con el que trabajaremos está en el plano, los primeros análisis pueden extenderse a **retículas** \mathbb{L}_d de dimensiones mayores. En éstas cada vértice está representado por un vector con d entradas enteras y las aristas unen a las parejas de puntos cuya distancia en \mathbb{R}^d es uno.

La distancia en \mathbb{R}^d de dos puntos $u = (u_1, \dots, u_d)$, $v = (v_1, \dots, v_d)$ se denota y calcula de la siguiente forma:

$$\|u, v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_d - v_d)^2};$$

de modo que $\mathbb{L}_d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^d &:= \{v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d; v_i \in \mathbb{Z} \forall 1 \leq i \leq d\}, \\ \mathbb{E}^d &:= \{(u, v); u, v \in \mathbb{Z}^d, \|u, v\| = 1\}. \end{aligned}$$

A grandes rasgos, el interés de la percolación es saber cuándo una subgráfica de \mathbb{L}_d que no contiene todas las aristas posibles aún tiene componentes conexas con una infinidad de vértices, o equivalentemente, las componentes tienen trayectorias tan largas como se desee.

Diremos que una **componente conexa** C_v es **infinita** si y sólo si la cantidad de vértices de la componente es infinita y se denota $|C_v| = \infty$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Una subgráfica conexa $G = (V, E)$ de \mathbb{L}_d es infinita si y sólo si existen trayectorias de longitud arbitraria que comiencen en un vértice $v \in V$ arbitrario.*

DEMOSTRACIÓN. Contar con trayectorias de longitud arbitraria es suficiente para que la gráfica sea infinita, pues si existe una trayectoria de longitud $n \in \mathbb{N}$ que comienza en $v \in V$; entonces la gráfica G tiene al menos los n vértices distintos de la trayectoria; como esto es válido para n tan grande como queramos, entonces necesariamente tenemos una infinidad de vértices en G .

Pero si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que todas las trayectorias que comienzan en v tienen longitud menor a N , entonces la gráfica es finita, porque cualquier vértice $w \in V$ estará a distancia menor que N del vértice v y el camino de longitud mínima que lo prueba deberá estar entre los caminos de longitud menor o igual a n que comienzan en v y como sólo hay una cantidad finita de estos caminos, entonces los vértices comunicados con v también son finitos.

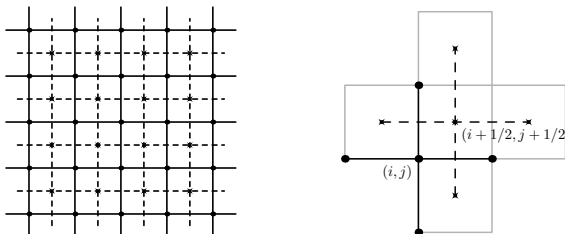


FIGURA 3. Con línea gruesa la retícula \mathbb{L}_2 y con línea punteada la retícula dual \mathbb{L}_2^* . La retícula dual \mathbb{L}_2^* se obtiene de sumar $(1/2, 1/2)$ a los vértices y aristas de \mathbb{L}_2 .

En efecto, hay una cantidad finita de caminos de longitud menor o igual a n porque para toda $k \in \mathbb{N}$, hay $2d(2d-1)^{k-1}$ caminos de longitud k que comienzan en v , porque éste tiene $2d$ aristas incidentes para elegir con cuál comenzar el camino y para las siguientes aristas del camino se tiene $2d-1$ posibilidades. \square

La **gráfica dual** $G^* = (V^*, E^*)$ de una gráfica plana $G = (V, E)$ se obtiene de la siguiente manera: dentro de cada cara en G se coloca sólo un **vértice dual** de G^* . Y dos vértices de G^* se unen con una **arista dual** $e^* \in E^*$ si y sólo si las caras correspondientes a estos vértices están separadas por la arista $e \in E$. Así, las aristas duales e y e^* se intersectan en el plano.

En el caso de la retícula \mathbb{L}_2 , cada arista e siempre separa dos caras, así que se tiene una arista dual e^* y dos caras adyacentes están separadas por una sola arista, de modo que si tenemos una arista e^* en la gráfica dual, sus extremos corresponden a dos caras en la gráfica G que están separadas por e , su única arista común. Entonces la correspondencia $e \rightarrow e^*$ de la construcción de gráficas duales es una biyección entre E y E^* .

Esto nos permite considerar simultáneamente el modelo de percolación de la retícula y el modelo de percolación de su retícula dual mediante las configuraciones y sus configuraciones duales, éstas serán subgráficas de \mathbb{L}_2 y \mathbb{L}_2^* que se amalgaman completamente bien, cubriendo todos los pares de aristas con sus duales, pero sin intersectarse entre sí.

Formalmente, una **configuración** es una subgráfica $K = (K, E) \subset \mathbb{L}_2$, con $E \subset \mathbb{E}^2$, definiremos a su **configuración dual** $K^* = (K^*, E^*)$ la subgráfica de \mathbb{L}_2^* cuyas aristas son exactamente las duales a las aristas que no pertenecen a K , es decir, $e^* \in E^*$

si y sólo si $e \notin E$. Para cualquier pareja e, e^* , se dice que e es una **arista abierta** en K y cerrada en K^* si $e \in E$ y que es una **arista cerrada** en K^* y abierta en K^* si $e^* \in E^*$.

De esta manera considerar abierta una arista en el dual K^* es como cerrar el paso a la existencia de su pareja en la configuración K y viceversa. De algún modo, K^* guarda la información de los límites de K .

Lo que nos interesa de las configuraciones son las aristas que tienen abiertas, por lo tanto consideraremos que su conjunto de vértices consta sólo de aquéllos que tienen aristas incidentes, y así también podemos considerar el **complemento** de K , como la gráfica inducida K^c por los vértices que no son extremos de aristas de K , a esta gráfica también la denotaremos $\mathbb{L}_2 \setminus K$.

Si tomamos una configuración K conexa y finita, es fácil ver que su complemento $\mathbb{L}_2 \setminus K$ tiene una única componente conexa K_∞ infinita. Ya que K es finita podemos construir un rectángulo finito suficientemente grande para cubrir a K . El **rectángulo** R será la gráfica inducida por los vértices $[-m, m] \times [-n, n] \subset \mathbb{Z}^2$ con m y n definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m &:= \text{máx}\{|i| : (i, j) \in K\}, \\ n &:= \text{máx}\{|j| : (i, j) \in K\}. \end{aligned}$$

Definimos a K_∞ como la componente conexa de K^c que contiene a R^c . Notemos que K_∞ es infinita porque $K_\infty \cup R = \mathbb{L}_2$ y R es finita mientras que la retícula es infinita. Resta verificar que cualquier otra componente conexa de K^c es finita, tomemos $G \subset K^c$ una componente conexa ajena a K_∞ ; por ser ajenas, $G \subset K_\infty^c \subset R$, pero R es finito y entonces G también es finita.

Además, si K es finita entonces está rodeada por un ciclo de K^* que se forma con las aristas duales a la frontera entre K y K_∞ ; esto se puede apreciar en la Figura 4 y se demuestra en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4. *Si $K \subset \mathbb{L}_2$ es una configuración conexa y finita, y llamamos K_∞ a la componente infinita de $\mathbb{L}_2 \setminus K$ y*

$$\begin{aligned} F &:= \{(u, v); u \in C \text{ y } v \in K_\infty\}, \\ \delta_\infty K &:= \{e^*; e \in F\}, \end{aligned}$$

entonces $\delta_\infty K$, es un ciclo con K en su interior.

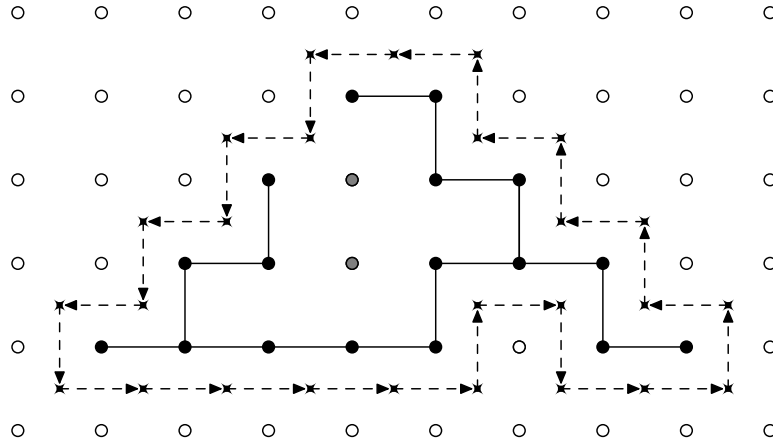


FIGURA 4. Si una componente conexa es finita, entonces su frontera en el dual forma un ciclo.

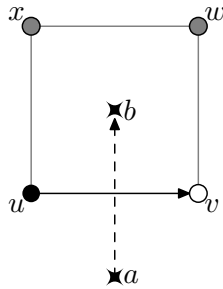
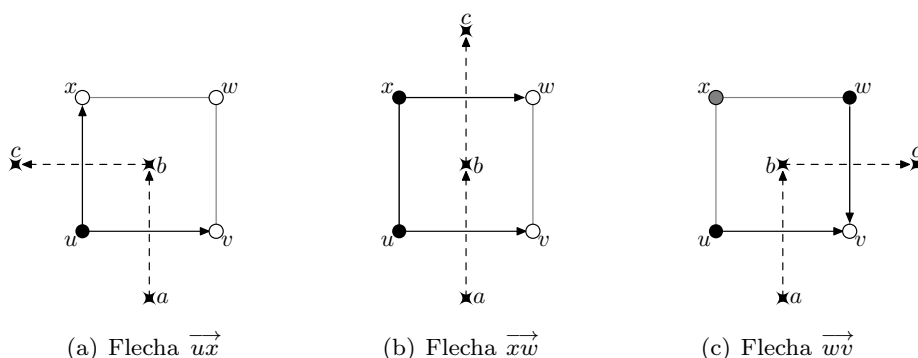


FIGURA 5. Las flechas de F van de K a K_∞ y sus flechas duales se obtienen de rotar las primeras 90° levógiro.

DEMOSTRACIÓN. Demos orientación a las aristas de F y $\delta_\infty K$ de modo que $\vec{f} = \overrightarrow{uv} \in F$ es una flecha con $u \in K$ y $v \in K_\infty$; y su flecha dual es $\vec{f}_* = \overrightarrow{ab} \in \delta_\infty K$, orientada de forma que se obtenga de rotar 90° en sentido levógiro a \vec{f} , ver Figura 5.

Si $\delta_\infty K$ es un solo ciclo, entonces cada flecha dual tiene un solo sucesor; para probarlo consideremos \overrightarrow{ab} , la flecha dual de $\overrightarrow{uv} \in F$, entonces b es el vértice dentro de la cara $uvwx$, como se muestra en la Figura 5. Afirmamos que exactamente dos de las aristas de esta cara pertenecen a la frontera con K_∞ . Dividamos en casos:

Primero descartamos que $w \notin K \cup K_\infty$ porque w es adyacente a v , así que si $w \notin K$, entonces w forma parte de la componente conexa de v en $\mathbb{L}_2 \setminus K$. Ahora bien,

FIGURA 6. Los 3 casos posibles de las aristas del ciclo $uvwx$.

si $w \in K_\infty$, entonces tenemos dos casos porque con el mismo argumento de arriba sabemos que $x \in K$ ó $x \in K_\infty$.

Por otro lado, si $w \in K$, es imposible que $x \in K_\infty$ porque como K y K_∞ son componentes conexas, existirían caminos que unen u con w y v con x que utilizan sólo vértices de K y K_∞ respectivamente; además pasan por el exterior del ciclo $uvwx$, pues no hay aristas dentro del ciclo. Ya que la gráfica $K_{3,3}$ no es aplanable, como se ve en Figura 2(a), estos caminos se intersectan en un vértice que debe pertenecer a K y K_∞ simultáneamente, dando lugar a una contradicción.

El último caso entonces es que $w \in K$ y $x \notin K_\infty$, aquí es irrelevante si $x \in K$ o si x es parte de alguna componente finita de $\mathbb{L}_2 \setminus K$.

En cualquiera de los tres casos, la segunda flecha incidente en b sale de la cara $uvwx$, como se muestra en la Figura 6. Con esto, como $\delta_\infty K$ es un conjunto finito, deben formarse ciclos y en realidad sólo se forma un ciclo.

Tomemos un ciclo $C \subset \delta_\infty K$, éste separa al plano en dos componentes y ya que sólo intersecta aristas de F que tienen extremos en K y K_∞ , deja a K_∞ en el exterior y a K en el interior. Luego, si una arista \vec{f}_* no fuera parte del ciclo C , entonces sus dos extremos quedan ya sea en el interior o el exterior de K , pero esto es una contradicción. Así que todas las flechas de $\delta_\infty K$ forman parte de un solo ciclo C . \square

La afirmación contraria también es válida; para asegurar que una configuración es finita, basta rodearla con un ciclo de su configuración dual. Así, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea $K \subset \mathbb{L}_2$ una configuración conexa y $K^* \subset \mathbb{L}_2^*$ su configuración dual. Si K^* contiene un ciclo C y en su interior se encuentra algún vértice de K , entonces K está en el interior de C y es finita.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que los ciclos tienen una cantidad finita de vértices y aristas, podemos encontrar un rectángulo $R = [-m, m] \times [-n, n] \subset \mathbb{L}_2$ que tenga en su interior a C . Así, los ciclos dividen al plano en dos regiones, el interior que está acotado y el exterior, que no lo está.

Ahora orientamos las aristas de C de modo que siguiendo las flechas se recorra al ciclo en sentido levógiro. Así, $\vec{f}_* \in C$ es la arista dual de $\overrightarrow{uv} \in F$ con u en el interior de C y v en la otra región del plano; éstas son las únicas aristas de \mathbb{L}_2 con la propiedad de tener sus extremos en regiones distintas del plano.

Sea $K_I \subset \mathbb{L}_2$ la gráfica inducida por los vértices que están en el interior de C . Luego, K_I también está contenida en el rectángulo R , que es una subgráfica finita y por lo tanto K_I también lo es. Además, $\mathbb{L}_2 \setminus K_I$ es una sola componente conexa, de modo que la frontera entre éstas dos es $\delta_\infty K_I = C$.

Si $K \subset K_I$, entonces la configuración K hereda las propiedades de ser una gráfica finita y estar en el interior del ciclo de K^* . Supongamos que K no está totalmente contenida en K_I y denotemos u al vértice de K que sabemos que está en el interior de C , v al vértice que está fuera del ciclo C . Entonces existe un camino $P = (v_1 = u, \dots, v_n = v)$ con todas sus aristas en K , como u está en K_I pero v no está en él, debe existir una primera arista $(v_k, v_{k+1}) \in K$ en el camino que pertenece a la frontera de K_I , así que su dual pertenece a $C \subset K^*$. Esto es una contradicción que surge de suponer que $v \notin K_I$.

Por lo tanto, K sí está dentro del ciclo C y es finita. \square

Finalmente, el lema del cruce horizontal es la herramienta más importante en cuanto a las propiedades de \mathbb{L}_2 se refiere. Es fácil convencerse que reduciendo la atención a configuraciones en rectángulos finitos siempre se puede atrevesar de un extremo a otro, ya sea con caminos en la configuración o en la configuración dual. Esto junto con el hecho de que \mathbb{L}_2 es autodual hará muy simétrico el comportamiento del modelo.

Que la retícula \mathbb{L}_2 sea **autodual** quiere decir que su gráfica dual \mathbb{L}_2^* es ella misma. Esto es, existe una biyección entre \mathbb{Z}^2 y \mathbb{Z}^{2*} que hace que las aristas en \mathbb{E}^2 y \mathbb{E}_*^2 se correspondan. En el siguiente lema mostramos que, efectivamente, $\mathbb{L}_2^* = (\mathbb{Z}_*^2, \mathbb{E}_*^2)$ es isomorfa a \mathbb{L}_2 .

LEMA 1.6. *La retícula \mathbb{L}_2 es isomorfa a su retícula dual $\mathbb{L}_2^* = (\mathbb{Z}_*^2, \mathbb{E}_*^2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Cada cara en \mathbb{L}_2 está determinada por su esquina inferior izquierda $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Podemos colocar el vértice dual a esa cara en $(i + 1/2, j + 1/2)$, de modo que los vértices duales sean la traslación de \mathbb{Z}^2 por el vector $(1/2, 1/2)$; y las

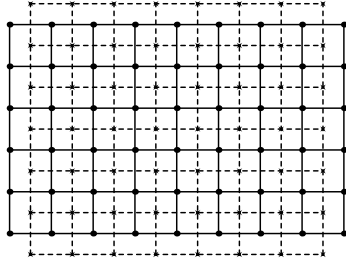


FIGURA 7. Un rectángulo R con líneas negras y su dual R^h con líneas punteadas.

traslaciones son biyectivas:

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2).$$

Luego, las aristas duales también unirán los vértices que estén a distancia 1 entre sí; y las aristas incidentes a cualquier vértice $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ corresponden bien a las aristas duales incidentes en $(i + 1/2, j + 1/2) \in \mathbb{Z}_*^2$, como se muestra en la Figura 3. Así, \mathbb{L}_2 y su dual son isomorfos. \square

Ahora definimos al **rectángulo** $R \subset \mathbb{L}_2$ como la gráfica inducida por los vértices $[0, m] \times [0, n] \subset \mathbb{Z}^2$ y a su **rectángulo dual** $R^h \subset \mathbb{L}_2^*$ como la gráfica inducida por los vértices duales $[1/2, m - 1/2] \times [-1/2, n + 1/2]$, como en la Figura 7. Se dice que R es un rectángulo de $m \times n$ y R^h de $m - 1 \times n + 1$.

Ahora para una configuración K en un rectángulo R , decimos que existe un **cruce horizontal** si K cuenta con un camino que comienza en un vértice del extremo izquierdo y termina en un vértice del extremo derecho y de manera análoga, tiene un **cruce vertical** cuando hay un camino que conecta los extremos superior e inferior. Notemos que si no hay caminos que atraviesen un rectángulo de lado a lado, es porque tenemos una barrera de aristas en el dual K^* que bloquean el paso, atravesando de extremo a extremo al rectángulo dual R^h , ver Figura 9. Pero lo más importante de esto es que siempre tenemos exactamente uno de estos cruces, horizontal o vertical.

LEMA 1.7 (Del cruce horizontal). *Si R es un rectángulo de \mathbb{L}_2 y K cualquier configuración de R , entonces hay un camino en K que atraviesa al rectángulo R de extremo a extremo vertical, o hay un camino en K^* que atraviese al rectángulo dual de extremo a extremo horizontal, pero no ambos.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos una gráfica auxiliar que se obtiene de sustituir cada vértice de R por un octágono negro y cada vértice del rectángulo dual R^h por un octágono blanco. Cada arista y su dual se representa con un cuadrado que se colorea

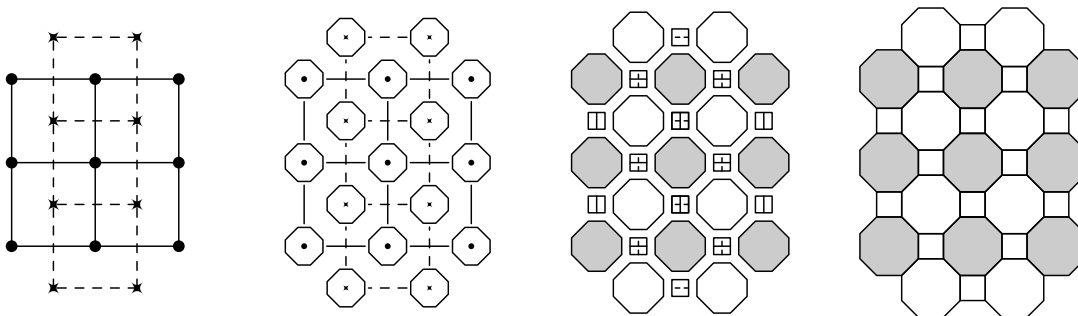


FIGURA 8. Los vértices se convierten en octágonos y las aristas en cuadrados, éstos se colorean de negro o blanco según pertenezcan a la configuración K o su dual K^* .

de negro si la arista pertenece a K y de blanco si la arista dual pertenece a K^* . Los cuadrados de los extremos verticales se consideran siempre negros y los cuadrados de los extremos horizontales serán blancos, como en la Figura 8.

Notemos que un camino en R que los extremos verticales ocurre si y sólo si encontramos un camino de octágonos y cuadrados negros que atraviese de izquierda a derecha y, del mismo modo, hay un camino en el dual R^h que conecta sus extremos horizontales si y sólo si hay un camino de octágonos y cuadrados blancos que atraviese de arriba a abajo.

De aparecer simultáneamente, tendríamos dos caminos que atraviesan R de extremo a extremo como en la Figura 2(b); y ya que $K_{3,3}$ no es aplanable, las curvas se intersectan en un cuadrado que debe ser negro y blanco a la vez porque es parte de los dos caminos que justifican los cruces horizontal y vertical en R y R^h respectivamente; por lo tanto sucede uno u otro.

Para ver que por lo menos uno de estos eventos ocurre, consideramos I la subgráfica de la gráfica auxiliar que se forma tomando las aristas de los octágonos y cuadrados que separan la región negra de la región blanca. Los vértices de I tienen dos aristas adyacentes, excepto los vértices x , y , z y w , marcados en la Figura 10 a los que sólo llega una arista. Así, recorriendo I desde x se puede tomar una sola arista cada vez y se termina en w o y ; no puede terminar en z porque al hacer el recorrido se tiene siempre la región negra al lado derecho y un camino que termine en z tiene la región negra al lado izquierdo.

Si se llega a w , como en la Figura 10, entonces los octágonos y cuadrados negros a la derecha nos dan un cruce horizontal en R , por otro lado, si se termina en y , entonces los octágonos y cuadrados blancos a la izquierda del recorrido nos dan un cruce vertical

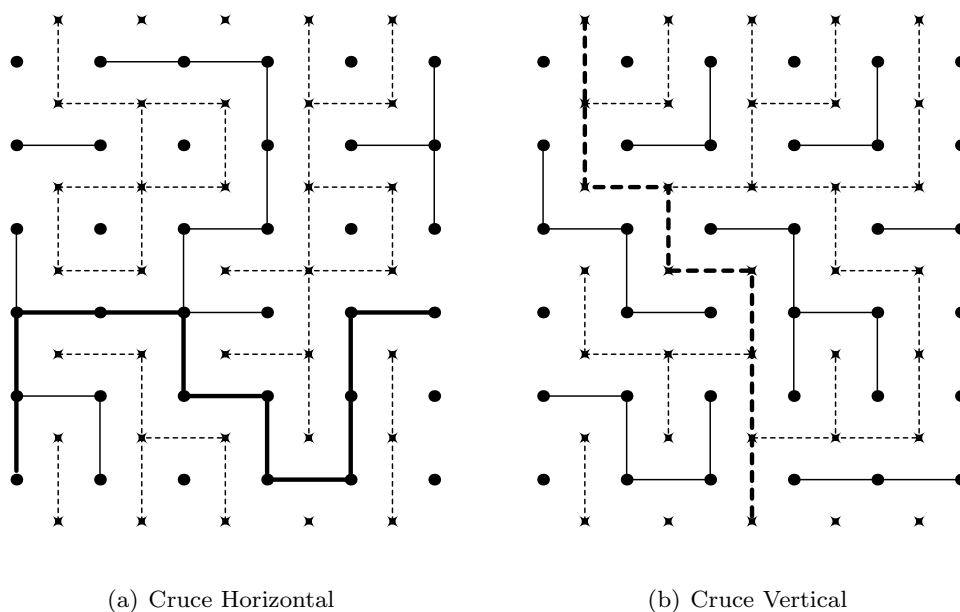


FIGURA 9. Existe exactamente un camino en K que atraviesa R o un camino que atraviesa R^h en K^* .

en R^h . La consideración por los cuadrados de los extremos verticales y horizontales no afectan las conclusiones, pues no es necesario usar las aristas que representan para tener caminos que atraviesan de extremo a extremo. Por lo tanto, en cada configuración de un rectángulo R uno y sólo uno de los cruces existe. \square

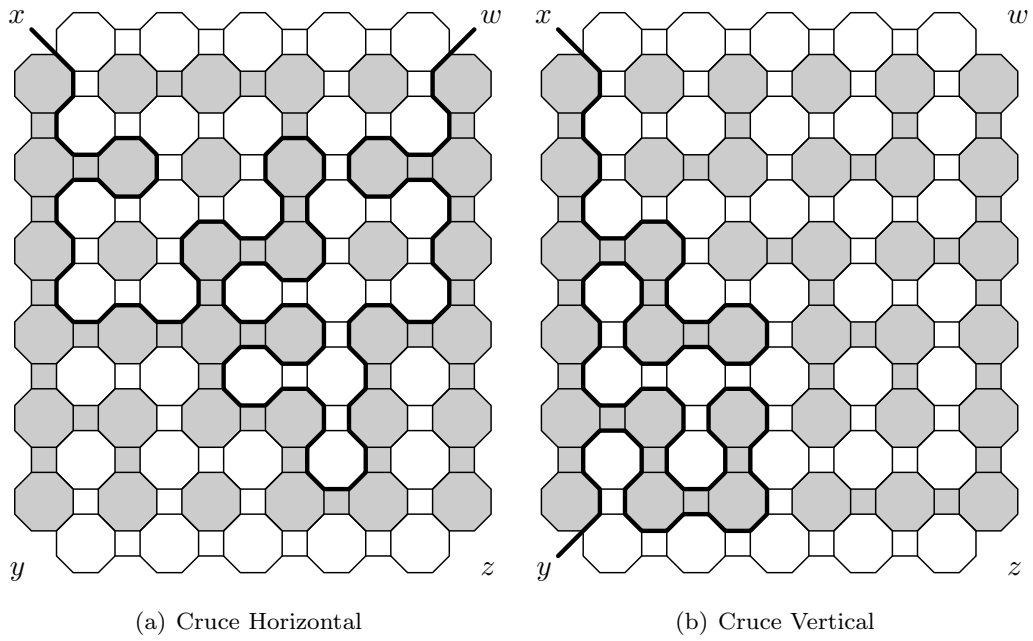


FIGURA 10. El camino que separa la gráfica negra de la blanca y que comienza en x sólo puede terminar en w ó y .

Elementos de la Teoría de Probabilidad

Para modelar un suceso aleatorio se usará un espacio de medida, que consta de un espacio de sucesos Ω que contenga todos los resultados posibles del suceso, una σ -álgebra \mathcal{F} que es una clase de subconjuntos del espacio que representan los eventos que manejaremos y finalmente una función $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, que asigna a cada evento su probabilidad de ocurrir.

En este capítulo daremos los conceptos y resultados necesarios para manejar técnicamente los espacios de probabilidad y las variables aleatorias; esto nos permitirá entender la ley 0-1 de Kolmogorov, la construcción de los modelos de percolación y los resultados sobre umbrales del siguiente capítulo.

1. Espacios Medibles y Clases

Las σ -álgebras son clases de conjuntos con propiedades adecuadas para definir medidas y espacios de la teoría de la medida y probabilidad; sin embargo existen otras clases con menos propiedades como las álgebras, los π -sistemas y los sistemas de Dynkin. Aquí daremos sus definiciones, explicaremos cómo se relacionan entre sí y presentamos una clase generadora de la σ -álgebra de los intervalos en \mathbb{R} .

Una σ -álgebra de Ω es un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ que cumple las siguientes tres condiciones:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ii) \mathcal{F} es cerrado bajo **complementos**; es decir, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$,
- iii) \mathcal{F} es cerrado bajo **uniones arbitrarias** numerables; es decir, si $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

Con estas tres propiedades, cualquier conjunto que se obtenga a través de operaciones permitidas con conjuntos de \mathcal{F} cae de nuevo en la σ -álgebra, éstas son uniones e intersecciones arbitrarias y obtener el complemento de un conjunto. Como el total y el vacío pertenecen a la clase, \mathcal{F} no sólo es cerrado bajo uniones arbitrarias numerables, también es cerrado bajo intersecciones pues

$$\bigcap_{i \geq 1} A_i = \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i^c \right)^c.$$

En las σ -álgebras, las uniones o intersecciones finitas también están incluidas porque éstas pueden expresarse como numerables, extendiendo la unión con conjuntos vacíos y la intersección con todo el espacio. Si una clase cumple las dos primeras condiciones pero sólo garantiza

iii') \mathcal{A} es cerrada bajo **uniones finitas**; es decir, si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$, entonces estamos hablando sólo de un **álgebra**. Sin embargo, no es necesario trabajar con toda la clase sino en otras más restringidas como los π -sistemas que cumplen iv) y los sistemas de Dynkin que cumplen i), v), vi):

iv) \mathcal{F} es cerrado bajo **intersecciones finitas**; es decir, si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$,

v) \mathcal{F} es cerrado bajo **diferencias propias**; es decir, si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $B \setminus A \in \mathcal{F}$,

vi) \mathcal{F} es cerrado bajo **uniones monótonas crecientes**; es decir, si $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ y además $A_i \subset A_{i+1}$, $i \geq 1$ entonces $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

La siguiente proposición establece que si contamos con un sistema de Dynkin que además es un π -sistema, entonces estamos hablando, en realidad, de una σ -álgebra.

PROPOSICIÓN 2.1 (Relación λ - π). *La clase \mathcal{F} es una σ -álgebra si y sólo si es un π sistema y un sistema de Dynkin.*

DEMOSTRACIÓN. Como se mencionó antes, una σ -álgebra es cerrada bajo intersecciones finitas; de modo que si \mathcal{F} es una σ -álgebra, entonces por un lado es un π -sistema y por otro, ya que la diferencia propia de dos conjuntos $A_2 \subset A_1$, es por definición una intersección entre el primer conjunto y el complemento del segundo tenemos que \mathcal{F} cumple la propiedad v) y la vi) que es un caso particular de iii), mostrando que \mathcal{F} un sistema de Dynkin.

Ahora bien, si \mathcal{F} es un sistema de Dynkin y un π -sistema, entonces por ser sistema de Dynkin \mathcal{F} cumple ii), pues para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ su complemento se puede expresar como la diferencia propia de dos elementos: $\Omega \setminus A = A^c$. Con esto, la unión de dos conjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ se puede expresar como la intersección de dos conjuntos en \mathcal{F} : $A_1^c \cap A_2^c$, así que \mathcal{F} también es cerrado bajo uniones finitas.

Finalmente, cualquier unión arbitraria numerable $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es igual a la unión monótona creciente de

$$B_i = \bigcup_{k=1}^i A_k \quad \forall i \in \mathbb{N};$$

es claro que $B_i \subset B_{i+1}$ y acabamos de demostrar que $B_i \in \mathcal{F}$ para toda $i \geq 1$. Luego, como \mathcal{F} es cerrado bajo uniones monótonas, también es cerrado bajo uniones arbitrarias y así, \mathcal{F} es una σ -álgebra. \square

A los elementos de una σ -álgebra se les llama **eventos medibles**; cualquier espacio tiene dos σ -álgebras, la trivial $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ y la total, que hace medibles a todos los subconjuntos del espacio, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pero en realidad vamos a necesitar σ -álgebras más sofisticadas. A continuación mostraremos la existencia de la σ -álgebra más pequeña que hace medible a una clase de conjuntos dada.

La **σ -álgebra generada** por una clase $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$, denotada $\sigma(A)$, es la σ -álgebra más pequeña que contiene a A . Ésta existe porque la σ -álgebra total contiene a cualquier clase A y se puede dar una expresión más clara de esta σ -álgebra,

$$\sigma(A) := \bigcap_{A \subset \mathcal{F}} \mathcal{F};$$

de modo que $\sigma(A)$ así definida sí es una σ -álgebra pues la intersección de σ -álgebras es σ -álgebra y no existe una σ -álgebra más pequeña que contenga a A .

OBSERVACIÓN. Si $\mathcal{F}_t, t \in T$ es una colección de σ -álgebras, entonces su intersección $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ es una σ -álgebra porque Ω pertenece a todas las σ -álgebras; del mismo modo, si un evento A o una sucesión de eventos $\{A_i\}_{i \geq 1}$ pertenecen a \mathcal{F}_t para todo $t \in T$, entonces su complemento A^c y la unión de la sucesión $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ también pertenecen a cada una de las σ -álgebras. Así, la intersección es cerrada bajo complementos y uniones arbitrarias; es decir, $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ es una σ -álgebra.

El siguiente teorema de alguna forma dice que construir diferencias propias y uniones monótonas son suficientes para generar una σ -álgebra de una clase que ya es cerrada bajo intersecciones finitas; es decir, un sistema de Dynkin que contiene un π -sistema también contiene su σ -álgebra generada; esto es natural por la relación λ - π que demostramos arriba en 2.1 y será de utilidad en las caracterizaciones siguientes.

TEOREMA 2.2 (σ -álgebra generada por un π -sistema). *Si \mathcal{C} es un π -sistema contenido en \mathcal{D} un sistema de Dynkin, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos $\lambda(\mathcal{C})$ al sistema de Dynkin más pequeño que contiene a \mathcal{C} . Así, $\lambda(\mathcal{C})$ está contenida en cualquier sistema de Dynkin que contenga a \mathcal{C} y basta probar que $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. Como $\sigma(\mathcal{C})$ también es un sistema de Dynkin, sólo falta probar que $\lambda(\mathcal{C})$ es una σ -álgebra, pero por la relación λ - π de la Proposición 2.1, esto se reduce a probar que para todo $A, B \in \lambda(\mathcal{C})$ se tiene

$$(1) \quad A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

Atacando el problema por partes, primero veamos que dados dos conjuntos, uno en $\lambda(\mathcal{C})$ y otro en \mathcal{C} se cumple (1), para esto consideremos a los conjuntos cuya intersección

con $B \in \mathcal{C}$ fijo, cae en $\lambda(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{A}_B := \{A \subset \Omega ; A \cap B \in \lambda(\mathcal{C})\},$$

tenemos que \mathcal{A}_B es un sistema de Dynkin: como $\Omega \cap B = B$, entonces el total pertenece a la clase; luego, en una diferencia propia $A_2 \setminus A_1$ de conjuntos en \mathcal{A}_B se cumple que

$$(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \lambda(\mathcal{C}),$$

y así, la \mathcal{A}_B es cerrada bajo diferencias propias. En cuanto a la cerradura de uniones monótonas, si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión monótona creciente contenida en \mathcal{A}_B entonces $\{A_i \cap B\}_{i \geq 1}$ es una sucesión monótona creciente contenida en $\lambda(\mathcal{C})$ y por lo tanto

$$(\cup_{i \geq 1} A_i) \cap B = \cup_{i \geq 1} (A_i \cap B) \in \lambda(\mathcal{C}),$$

además, es claro que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}_B$ pues éste es un π -sistema, de modo que $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_B$. Sólo falta garantizar que para toda $A \in \lambda(\mathcal{C})$ y $B \in \lambda(\mathcal{C})$ se cumple (1). Fijando A , definimos

$$\mathcal{B}_A := \{B \subset \Omega ; A \cap B \in \lambda(\mathcal{C})\}.$$

De manera análoga se muestra que \mathcal{B}_A es un sistema de Dynkin y contiene a \mathcal{C} porque sabemos que cumple (1) para cualquier elemento B del π -sistema, ya que $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_B$. Con esto demostramos que $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}_A$ para cualquier $A \in \lambda(\mathcal{C})$.

Así, para cualquier pareja de elementos $A, B \in \lambda(\mathcal{C})$ se tiene (1) y por lo tanto el sistema de Dynkin generado por \mathcal{C} también es π -sistema; esto completa la prueba de que $\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$ y que $\sigma(\mathcal{C}) \subset D$. \square

Si estamos trabajando en el espacio de los números reales, la σ -álgebra de los **borelianos**, \mathcal{B} , es la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos. Existen muchas formas de generar esta σ -álgebra con clases más reducidas, una de ellas es la clase de los intervalos semi-infinitos, (a, ∞) $a \in \mathbb{R}$, esta clase forma un π -sistema y será de utilidad más adelante.

LEMA 2.3. *La σ -álgebra de los borelianos y la σ -álgebra generada por la clase \mathcal{I} de los intervalos de la forma (a, ∞) coinciden:*

$$\mathcal{I} := \{(a, \infty) ; a \in \mathbb{R}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como \mathcal{I} es una subclase de los intervalos abiertos, entonces su σ -álgebra generada está contenida en los borelianos; por otro lado, si todos los intervalos abiertos están en la σ -álgebra generada por \mathcal{I} tendremos la igualdad entre las σ -álgebras.

Así las cosas, probemos que los intervalos de la forma $(-\infty, b)$ pertenecen a $\sigma(\mathcal{I})$. Para cada $b \in \mathbb{R}$, la siguiente intersección pertenece a la σ -álgebra generada por \mathcal{I} ,

$$\bigcap_{k \geq 1} (b - \frac{1}{2^k}, \infty) = [b, \infty),$$

y entonces su complemento $(-\infty, b)$ y cualquier otro tipo de intervalo abierto, $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$, pertenecen a $\sigma(\mathcal{I})$. Probando que $\sigma(\mathcal{I})$ también genera a la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}.$$

□

2. Variables Aleatorias

La medida de probabilidad \mathbb{P} es una función que asigna a cada evento medible un valor proporcional al espacio. Así, al total se le asigna la unidad y se pide que la medida de probabilidad sea monótona creciente y que sin importar cómo se divida un evento medible en una cantidad numerable de partes, la suma de la medida de éstas coincida con la medida del evento. En esta sección se dará la definición de medida de probabilidad y demostraremos sus propiedades más importantes; también definiremos las funciones medibles, algunas de sus características, presentamos las variables de tipo Bernoulli y las de distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y definiremos la esperanza y esperanza condicionada de una variable discreta.

Una **medida de probabilidad** es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple:

- i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- iii) Si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de eventos disjuntos del álgebra entonces

$$\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i).$$

A esta última condición se le conoce como σ -**aditividad** y de ella se pueden deducir tres propiedades más de las medidas de probabilidad.

PROPOSICIÓN 2.4. Si $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una medida de probabilidad, entonces

- i) \mathbb{P} es creciente; es decir, si $A \subset B$ son eventos medibles, entonces

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B),$$

- ii) \mathbb{P} es σ -subaditiva; es decir, si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de eventos medibles, entonces

$$\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i).$$

iii) \mathbb{P} es continua; es decir, si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión monótona de eventos medibles, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\lim_{i \rightarrow \infty} A_i).$$

DEMOSTRACIÓN. La σ -aditividad también se puede aplicar a sucesiones finitas de eventos disjuntos añadiendo a la sucesión una infinidad de conjuntos vacíos; éstos son disjuntos a cualquier otro evento y tienen probabilidad nula. De modo que

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i).$$

En particular, la unión de dos eventos A y B se pueden formar con la unión de A y $B \setminus A$ que son disjuntos; más aún si $A \subset B$, entonces su unión es sólo B , y así la igualdad de arriba equivale a las siguientes relaciones que son comúnmente utilizadas,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\leq \mathbb{P}(B), \\ \mathbb{P}(B \setminus A) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A), \\ \mathbb{P}(A^c) &= 1 - \mathbb{P}(A); \end{aligned}$$

en la última igualdad se toma B como el total. También podemos expresar una unión arbitraria $\cup_{i \geq 1} A_i$ como la unión disjunta $\cup_{i \geq 1} B_i$ con

$$B_i = A_i \setminus (\cup_{k=1}^{i-1} A_k),$$

en efecto, los eventos son disjuntos ya que B_j pertenece a A_j , mientras que B_i está contenido en el complemento A_j^c para todo $j < i \in \mathbb{N}$. Y la unión de estas dos sucesiones coincide porque si existe un primer conjunto A_i que contiene a un elemento $x \in \Omega$; es decir, si se tiene que $x \in A_i$ pero $x \notin A_j$ para los conjuntos anteriores a A_i , entonces x pertenece a B_i . Y es claro que $B_i \subset A_i$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Entonces con la σ -aditividad y la monotonía de la medida,

$$\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i).$$

Si tratamos con sucesiones monótonas crecientes, entonces el límite de la sucesión es su unión y además utilizando los conjuntos B_i , $i \in \mathbb{N}$ que definimos arriba tenemos

que

$$(2) \quad A_i = \cup_{j=1}^i B_j,$$

pues $B_j \subset A_i$ para cada $j \leq i$ y tomando el primer conjunto A_k al que pertenece un elemento $x \in A_i$, por la monotonía de la sucesión es necesario que $k \leq i$ y así, x pertenece a B_k . Entonces el límite de A_i , se puede calcular con ayuda de (2) y así

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{j \leq i} B_j) = \mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} A_i).$$

Por otro lado, ya que el límite de una sucesión monótona decreciente $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es su intersección y su complemento es el límite de la sucesión creciente de sus complementos, tenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\cap_{i \geq 1} A_i)$$

como queríamos. □

Para saber si dos medidas asignan la misma probabilidad a todos los eventos medibles de una σ -álgebra, basta con revisar que las probabilidades sean iguales en un π -sistema que genere a la σ -álgebra que estamos utilizando.

PROPOSICIÓN 2.5 (Unicidad). *Si \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 son medidas de probabilidad en $\sigma(\mathcal{C})$, que coinciden en \mathcal{C} un π -sistema, entonces $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ en todo su dominio.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la clase de todos los conjuntos en donde ambas medidas coinciden,

$$\mathcal{D} := \{A \in \Omega; \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}.$$

Utilizando el Teorema 2.2 sobre σ -álgebras generadas con π -sistemas, basta probar que \mathcal{D} es un sistema de Dynkin, pues por hipótesis tenemos que el π -sistema \mathcal{C} estaría contenido en \mathcal{D} .

Es muy sencillo ver que \mathcal{D} es un sistema de Dynkin. Tenemos que $\Omega \in \mathcal{D}$ pues la medida del total siempre es 1 y si dos eventos A y B están en la clase \mathcal{D} y tenemos que $A \subset B$, entonces su diferencia también está en \mathcal{D} porque su medida es la diferencia de las medidas de A y B , que coinciden en \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 ; finalmente, si tenemos una sucesión monótona creciente $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}$, entonces podemos utilizar la continuidad de la medida de probabilidad para ver que su unión también pertenece \mathcal{D} .

De modo que \mathbb{P}_1 coincide con \mathbb{P}_2 en todo su dominio porque $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. □

Por lo general, la probabilidad de un evento cambia dependiendo de la información con la que contamos. Supongamos que ya sabemos que ocurrió B ; entonces preguntarse por la probabilidad de A queda reducido a preguntarse por la probabilidad de $A \cap B$

porque el conjunto $A \cap B^c$ carece de peso ahora que sabemos que nuestro elemento pertenece a B . Así podemos definir la **probabilidad condicional** como

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} & \text{si } \mathbb{P}(B) > 0 \\ 0 & \text{si } \mathbb{P}(B) = 0. \end{cases}$$

Hay que normalizar dividiendo entre $\mathbb{P}(B)$ para que esta función $\mathbb{P}(\cdot|B)$ siga siendo una medida de probabilidad, la σ -aditividad se hereda de \mathbb{P} que ya es una medida. A veces será útil calcular la probabilidad de un evento dividiéndolo en varios eventos disjuntos y condicionando, así tenemos la fórmula de la probabilidad total y la fórmula de Bayes.

TEOREMA 2.6 (Fórmula de probabilidad total y Bayes). *Si $\{H_i\}_{i \in I}$ es una partición a lo más numerable del espacio, se tiene para cualquier evento $A \in \mathcal{F}$*

1. La fórmula de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$$

2. La fórmula de Bayes,

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A|H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\{H_i\}_{i \in I}$ es una partición de Ω entonces $\{A \cap H_i\}_{i \in I}$ son eventos disjuntos cuya unión es A y por la σ -aditividad de la medida,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap H_i)$$

y con la definición de probabilidad dado H_i , tenemos la fórmula de la probabilidad total. Además la probabilidad de $A \cap H_i$ también se puede expresar con la probabilidad condicionada con A , teniendo para cada $i \in I$

$$\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) = \mathbb{P}(H_i|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Despejando y sustituyendo $\mathbb{P}(A)$ con la fórmula de la probabilidad total, se obtiene la fórmula de Bayes. \square

Dada una función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ entre dos espacios medibles, se dice que es \mathcal{F} -**medible** o simplemente **medible** si la imagen inversa de cualquier evento $A' \in \mathcal{F}'$ del codominio es medible,

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$$

entonces que una función X sea medible depende de las σ -álgebras \mathcal{F} y \mathcal{F}' que se les asigne a los espacios. La σ -álgebra de eventos que \mathcal{F} debe contener es

$$\{X^{-1}(A') \in \Omega; A' \in \mathcal{F}'\};$$

así que será la intersección de todas las σ -álgebras que hacen medibles a X y por eso se le denota $\sigma(X)$, la σ -álgebra **generada por la función X** .

OBSERVACIÓN. Si \mathcal{F}' está generada por alguna clase \mathcal{C} , entonces basta revisar la medibilidad en esa clase porque cualquier evento en \mathcal{F}' se obtiene con operaciones conjuntistas a partir de los eventos de \mathcal{C} . Y ya que la preimagen conserva bien estas operaciones:

$$X^{-1}(A^c) = X^{-1}(A)^c, \quad X^{-1}(\cup_{i \geq 1} A_i) = \cup_{i \geq 1} X^{-1}(A_i),$$

tenemos que la preimagen de cualquier evento que se obtiene a partir de \mathcal{C} se obtiene a partir de operaciones conjuntistas de eventos que ya sabemos que son medibles.

Cuando el primer espacio tiene una medida de probabilidad, ésta induce al segundo una medida de probabilidad \mathbb{P}' de manera natural, como vemos a continuación:

LEMA 2.7. *La función $\mathbb{P}' : (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\mathbb{P}'(A') = \mathbb{P}(X^{-1}(A')) \quad \forall A' \in \mathcal{F}',$$

es una medida de probabilidad en Ω' .

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier función X , la preimagen del vacío y del total son ellos mismos, de modo que sus medidas son 0 y 1 respectivamente, además \mathbb{P}' es no negativa porque es igual a una probabilidad y finalmente, la σ -aditividad se obtiene de ver que si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una colección disjunta de eventos en \mathcal{F}' , entonces es necesario que sus preimágenes también sean disjuntas; así podemos usar la σ -aditividad de \mathbb{P} de manera que

$$\mathbb{P}'(\cup_{i \geq 1} A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} X^{-1}(A_i)) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}'(A_i).$$

□

De manera general llamaremos a las funciones medibles **elementos aleatorios** y cuando el codominio son los reales con la σ -álgebra de los borelianos, entonces se les llamarán **variables aleatorias**. En este contexto, a la medida \mathbb{P}' se le suele llamar **distribución** de la variable aleatoria.

Aquí usaremos sólo dos tipos especiales de variables aleatorias; las de tipo **Bernouilli** que sólo toman dos valores, 0 y 1; y las de distribución **uniforme en el intervalo** $[0, 1]$, que son variables aleatorias que asignan la misma probabilidad a todos los intervalos de la misma longitud.

La medida de Lebesgue es la única que hace que los intervalos (a, b) tengan medida $b - a$ y ésta restringida al intervalo $[0, 1]$ es la distribución de una variable aleatoria uniforme en el $[0, 1]$. La construcción de la medida de Lebesgue usa el método de extensión de Carathéodory que veremos en la sección 1 del siguiente capítulo y además será necesario encontrar un álgebra que genere a los borelianos; para ver que es la única medida que asigna a cada intervalo su longitud usamos el Teorema 2.5 de unicidad aplicado a un π -sistema, digamos la clase \mathcal{I} de los intervalos semi-infinitos. Para una demostración detallada de esto, ver [Bar95].

La siguiente proposición nos permitirá crear variables aleatorias que sean el límite de sucesiones crecientes de variables aleatorias; esto se podría generalizar a cualquier tipo de límite.

PROPOSICIÓN 2.8. *Dada una sucesión creciente $\{X_i\}_{i \geq 1}$ de variables aleatorias cuyo límite es la función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, se tiene que X también es una variable aleatoria.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que \mathcal{I} genera a los borelianos, basta probar que la preimagen de cualquier intervalo semi-infinito,

$$X^{-1}(a, \infty) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) > a\},$$

es \mathcal{F} -medible.

Para cada elemento $\omega \in X^{-1}(a, \infty)$ sabemos que la sucesión $X_i(\omega)$ converge a su supremo $X(\omega)$, de modo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$X(\omega) - X_i(\omega) < X(\omega) - a$$

para toda $i \geq N$, y así $\omega \in X_i^{-1}(a, \infty)$ para i suficientemente grande; por otro lado, $X(\omega) \geq X_i(\omega)$ para toda i , esto muestra que

$$X^{-1}(a, \infty) = \cup_{i \geq 1} X_i^{-1}(a, \infty);$$

entonces la preimagen de un intervalo (a, ∞) es una unión de intervalos medibles, porque cada variable X_i es medible. Y así, X también es medible.

Notemos que además estamos aproximando la preimagen del intervalo con una sucesión monótona creciente de eventos medibles porque $a < X_i(\omega) \leq X_j(\omega)$ para toda $j \geq i$. Entonces usando la continuidad de la medida y podemos encontrar la distribución de X si conocemos las distribuciones de X_i ; $i \in \mathbb{N}$. \square

Si bien no podemos conocer el valor exacto de una variable aleatoria, podemos definir su *esperanza*. Esto es de alguna manera el promedio de los valores que adopta la variable. Los casos que se presentan en este trabajo sólo incluyen variables discretas, cuyos posibles valores son a lo más numerables. Si $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una variable discreta con $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$, entonces su esperanza está dada por

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

La esperanza de una variable se obtiene de sumar todos los valores posibles de la variable, ponderado por la probabilidad de obtener cada valor. Y así como se puede hablar de la probabilidad condicionada a un evento, también podemos hablar de la *esperanza condicionada* de X a un evento A , definida como sigue

$$\mathbb{E}(X|A) := \frac{\mathbb{E}(X \cdot \chi_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

donde χ_A es la función característica, que asigna 1 a todos los elementos de A y cero al resto.

La esperanza además tiene la propiedad de ser lineal y monótona. Esto es, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y variables X, Y se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(cX) &= c\mathbb{E}(X), \\ \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}(X) &\leq \mathbb{E}(Y) \quad \text{si } X \leq Y \end{aligned}$$

Esto es fácil de probar para variables discretas, para una definición general de esperanza y una demostración completa de sus propiedades se puede consultar el capítulo 2.4 de [Gut05].

3. Independencia

La independencia de dos eventos medibles se refiere a que la probabilidad de ocurrir de cualquiera de ellos no afecta la probabilidad de ocurrir del otro; esto se generaliza a cualquier conjunto de eventos, clases de eventos y familias de variables aleatorias. El objetivo central de esta sección es entender la ley 0-1 de Kolmogorov para variables aleatorias independientes, pues es central para relacionarlo con el comportamiento de los eventos que estudia la percolación; para esto daremos condiciones suficientes para que a partir de clases de eventos independientes podamos formar otras clases más grandes de eventos independientes.

Dos eventos A, B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, así en este caso, saber que ocurrió B no cambia la probabilidad de A , esto se puede apreciar con el

punto de vista de la probabilidad condicional pues

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Generalizando, se dice que los eventos $\{A_t\}_{t \in T}$ en \mathcal{F} es una colección de *eventos independientes* si para cualquier conjunto de índices finito $t_1, \dots, t_k \in T$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_{t_i}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{t_i}).$$

La familia de clases \mathcal{C}_t ; $t \in T$ es independiente si cualquier colección de eventos $A_t \in \mathcal{C}_t$, $t \in T$ lo es; y las variables aleatorias X_t ; $t \in T$ son independientes si sus σ -álgebras $\sigma(X_t)$ son independientes.

OBSERVACIÓN. Una familia \mathcal{C}_t ; $t \in T$ es independiente si y sólo si toda subfamilia finita es independiente y sustituir \mathcal{C}_t por cualquier subconjunto de él mismo no altera la independencia de la familia.

Como siempre, para verificar que una familia de σ -álgebras son independientes es mucho más fácil revisar sólo sus generadores; veremos que esto es posible si los generadores son π -sistemas y que sin importar cómo agrupemos las σ -álgebras para generar otras más grandes, se sigue conservando la independencia.

Así, tenemos los siguientes dos resultados.

TEOREMA 2.9. *Si \mathcal{C}_t , $t \in T$ es una familia de π -sistemas independientes. Entonces sus σ -álgebras generadas $\sigma(\mathcal{C}_t)$, $t \in T$ también son independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la independencia de una familia se reduce a revisar que cualquier familia finita es independiente, podemos suponer que T es finito. El método para atacar el problema será el siguiente: probaremos que si reemplazamos \mathcal{C}_t por $\sigma(\mathcal{C}_t)$ seguimos teniendo una familia de eventos independientes.

Digamos que nuestra familia es $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n$. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ la clase de todos los eventos $E \in \Omega$ que son independientes con la familia \mathcal{C}_i ; $1 \leq i \leq n$. Es decir,

$$\mathcal{D} := \{E \in \Omega : \{E, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\} \text{ son independientes}\};$$

así podemos decir que la familia $\{\mathcal{D}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ es independiente. Para probar que \mathcal{D} contiene a $\sigma(\mathcal{C}_0)$, hay que ver que \mathcal{D} es un sistema de Dynkin y así podemos usar el Teorema 2.2 que encuentra la σ -álgebra generada por un π -sistema dentro de un sistema de Dynkin.

Utilizaremos una sucesión arbitraria $A_{i_j} \in \mathcal{C}_{i_j}$, $j \leq n$, independiente por hipótesis. Es claro que $\Omega \in \mathcal{D}$ porque la medida del total es 1 y eso lo hace independiente de

cualquier colección de eventos; luego, si tenemos dos conjuntos E_1 y $E_2 \in \mathcal{D}$ tales que $E_2 \subset E_1$, entonces su diferencia también es independiente de la sucesión que tomamos, pues sabemos que

$$\mathbb{P}((E_1 \setminus E_2) \cap A_{i_1} \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(E_1 \cap A_{i_1} \cdots \cap A_{i_k}) - \mathbb{P}(E_2 \cap A_{i_1} \cdots \cap A_{i_k})$$

y en el lado derecho de la ecuación se puede usar que los eventos E_1 y E_2 son independientes de la sucesión para separarlo en un producto de probabilidades, del que se puede factorizar la diferencia de las probabilidades de estos eventos para obtener la probabilidad de $E_1 \setminus E_2$.

Para las uniones monótonas crecientes utilizaremos la continuidad de la probabilidad. Si $\{E_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}$ es una sucesión creciente cuya unión es E , entonces se tiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_i \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_i) \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}),$$

por lo tanto \mathcal{D} es un sistema de Dynkin porque es cerrado bajo diferencias propias y uniones monótonas, además contiene a \mathcal{C}_0 . Así que $\sigma(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{D}$. Con esto sabemos que la familia $\{\sigma(\mathcal{C}_0), \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ es independiente y siguiendo este proceso un número finito de veces obtenemos la conclusión deseada. \square

Uno de los resultados del teorema anterior es la siguiente proposición que permite agrupar σ -álgebras independientes; cada grupo de σ -álgebras se intercambia con la σ -álgebra generada por su unión. Más formalmente, si $\mathcal{F}_t, t \in T$ es una familia de σ -álgebras, para cualquier $S \subset T$ definimos a la σ -álgebra de una colección de σ -álgebras como

$$\mathcal{F}_S = \sigma(\mathcal{F}_t; t \in S) := \sigma(\cup_{t \in S} \mathcal{F}_t).$$

COROLARIO 2.10 (Agrupando). *Si $\mathcal{F}_t, t \in T$ son σ -álgebras independientes y \mathcal{P} es una partición de T , entonces las σ -álgebras $\mathcal{F}_S; S \in \mathcal{P}$ también son independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $S \in \mathcal{P}$ definamos \mathcal{C}_S como la clase de todas las intersecciones finitas posibles de elementos de las σ -álgebras asociadas a S ,

$$\mathcal{C}_S = \{ \cup_{t \in S'} A_t : A_t \in \mathcal{F}_t, S' \subset S \text{ finito} \}.$$

Notemos que si dos de los elementos A_t y A'_t pertenecen a la misma σ -álgebra \mathcal{F}_t , entonces su intersección también pertenece a \mathcal{F}_t ; de modo que los elementos de \mathcal{C}_S se pueden expresar como intersección de a lo más un elemento de cada σ -álgebra $\mathcal{F}_t, t \in S$. Entonces \mathcal{C}_S es un π -sistema, pues la intersección de dos elementos en \mathcal{C}_S también es una intersección finita de elementos de $\mathcal{F}_t, t \in S$.

Además el π -sistema \mathcal{C}_S genera al σ -álgebra \mathcal{F}_S ; porque éste contiene a cada evento en \mathcal{F}_t ; $t \in S$ y está contenido a su vez en \mathcal{F}_S . Por lo tanto, gracias al teorema de arriba, basta probar que \mathcal{C}_S , $S \in \mathcal{P}$ es una familia de eventos independientes.

Pero esta propiedad se hereda de \mathcal{F}_t , $t \in T$; porque cualquier intersección finita de elementos $C_s \in \mathcal{C}_S$ es a su vez una intersección finita de elementos $A_t \in \mathcal{F}_t$, de modo que

$$\mathbb{P}(\cap_{S \in \mathcal{P}} \cap_{t \in S} A_t) = \prod_{S \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\cap_{t \in S} A_t)$$

como queríamos. \square

En el estudio de la percolación, se tiene un proceso que cuenta con una infinidad de variables aleatorias, de modo que sabremos si ciertos eventos ocurren sólo cuando *observamos* el proceso completo. Generalmente a estos eventos se les llama **eventos de cola** y suelen representar eventos que implican un periodo de tiempo infinito; para esto, las variables aleatorias deben estar ordenadas de algún modo. Sin embargo, en el caso de la percolación, no se utiliza el concepto de tiempo y las variables aleatorias en principio no tienen por qué estar ordenadas; es por esto que nos referiremos a los eventos de cola con un nombre distinto: eventos infinitos.

Dada una colección $X_i; i \in \mathbb{N}$ de variables aleatorias independientes, denotamos \mathcal{F}_S a la σ -álgebra generada por las variables aleatorias con índice en $S \subset \mathbb{N}$, mientras que la σ -álgebra generada por toda la colección será \mathcal{F} .

Diremos que $E \in \mathcal{F}$ es un **evento infinito** si pertenece a la σ -álgebra **infinito**

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{S \text{ finito}} \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus S}.$$

Ya que el Teorema 2.10 permite agrupar σ -álgebras independientes, tenemos que $\mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus S}$ es independiente de \mathcal{F}_S , que es la σ -álgebra de las variables asociadas al conjunto S ; los eventos infinito tienen la característica de ser independientes de cualquier conjunto finito de las variables aleatorias que los generan.

En contraste, definimos el álgebra \mathcal{F}_0 de los **eventos finitamente generados** como

$$\mathcal{F}_0 := \bigcup_{S \text{ finito}} \mathcal{F}_S;$$

es decir, todos aquellos eventos que pertenecen a una σ -álgebra generada por un conjunto finito de variables.

Para ver que \mathcal{F}_0 es un álgebra, primero veamos que es un π -sistema: si dos eventos $A \in \mathcal{F}_S$ y $B \in \mathcal{F}_R$ con S y R finitos, entonces ambos pertenecen a $\mathcal{F}_{S \cup R}$, donde $S \cup R$

también es finito, así tenemos que

$$A \cap B \in \mathcal{F}_{SUR} \subset \mathcal{F}_0$$

para cualesquiera eventos $A, B \in \mathcal{F}_0$. Por último, es claro que \mathcal{F}_0 es cerrada bajo complementos, pues para cualquier evento $A \in \mathcal{F}_S$ finitamente generado, tenemos que $A^c \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_0$.

Ahora bien, la ley 0-1 de Kolmogorov muestra que la probabilidad de los eventos infinitos $E \in \mathcal{F}_\infty$ sólo puede ser 0 ó 1. Notemos que si la probabilidad de un evento E es 1, no significa que $E = \Omega$, sino que el conjunto de realizaciones donde no sucede el evento E es despreciable pues no tiene medida positiva.

TEOREMA 2.11 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Dada una sucesión de variables aleatorias $X_i; i \in \mathbb{N}$ independientes, si E pertenece a su σ -álgebra infinito \mathcal{F}_∞ , entonces la probabilidad de E es trivial: $\mathbb{P}(E) = 0$ ó $\mathbb{P}(E) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la clase de eventos \mathcal{D} que son independientes de E ,

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(D \cap E) = \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E)\}.$$

De modo que si $E \in \mathcal{D}$, tendremos que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E)^2$, de donde se obtiene que la probabilidad del evento es 0 ó 1.

Es fácil ver que \mathcal{D} es un sistema de Dynkin, la prueba es análoga a la que se usa en la Proposición 2.9. Luego, por construcción, para cada S finito, \mathcal{F}_S es independiente de E , así que \mathcal{F}_0 , que es un π -sistema, está contenido en \mathcal{D} , un sistema de Dynkin; aplicando el Teorema 2.2 vemos que

$$\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{D}.$$

Finalmente, los generadores de \mathcal{F} están contenidos en \mathcal{F}_0 , de modo que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ y a su vez la σ -álgebra infinito está contenida en \mathcal{F} . Es decir, $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{D}$ y por lo tanto E es independiente de sí mismo para cualquier E evento infinito. \square

El Modelo de Percolación

Ya que conocemos los elementos que necesita un espacio de probabilidad, tenemos que mostrar que existe uno que se adecúe a las características de la percolación. Desarrollamos el método de extensión de Carathéodory para construir un espacio de probabilidad con una cantidad numerable de variables independientes del tipo Bernoulli; más aún, mostraremos que con este espacio también se puede considerar una cantidad numerable de variables independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, en este espacio se generan todos los modelos de percolación para una gráfica dada, permitiendo compararlos.

1. Extensión de Carathéodory

Definir una medida de probabilidad no es cosa fácil, el primer problema que encontramos es caracterizar a todos los eventos de una σ -álgebra. Aquí mostraremos las condiciones necesarias para definir una función en un álgebra y asegurar que ésta se puede extender a una medida de probabilidad en su σ -álgebra generada.

Dada un álgebra \mathcal{A} , consideremos una función $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumpla las condiciones que se piden a una medida de probabilidad con la siguiente consideración: la σ -aditividad sólo se verifica para eventos que pertenezcan al álgebra; es decir, esta propiedad se aplica dado que contemos con una sucesión $\{A_i\}_{i \geq 1}$ de eventos disjuntos del álgebra cuya unión cumpla a su vez

$$\cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A};$$

así, sólo faltaría definir la probabilidad de cualquier evento medible del resto de $\sigma(\mathcal{A})$.

Definamos ahora la **medida exterior** \mathbb{P}^* para todos los subconjuntos A de Ω :

$$\mathbb{P}^*(A) = \inf \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas numerables de A con eventos del álgebra, es decir, $A \subset \cup_{i \geq 1} A_i$ con $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{A}$. Si queremos dar una probabilidad al evento A , estas series son una buena aproximación, pues pueden tomarse cubiertas que cada vez se traslapen menos y que no se extiendan mucho más allá de A .

Las propiedades de \mathbb{P}^* son las mismas que las de una medida de probabilidad, excepto por la σ -aditividad; de modo que las medidas exteriores no son medidas de probabilidad.

PROPOSICIÓN 3.1. *La medida exterior $\mathbb{P}^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^*$ cumple:*

- i) $\mathbb{P}^*(\emptyset) = 0$,
- ii) $\mathbb{P}^*(A) \leq \mathbb{P}^*(B)$; si $A \subset B$,
- iii) $\mathbb{P}^*(\cup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}^*(A_i)$; para cualquier sucesión de subconjuntos de Ω .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la medida exterior de cualquier conjunto es no negativa porque estamos considerando series de probabilidades. Luego, una cubierta del conjunto vacío es él mismo, por lo que su medida exterior es nula. Y si $A \subset B$, entonces cualquier cubierta de B también es una cubierta de A y por lo tanto, el conjunto de cubiertas de B está contenido en el de las cubiertas de A , así

$$\mathbb{P}^*(A) \leq \mathbb{P}^*(B).$$

Finalmente, para la σ -subaditividad, si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{P}(\Omega)$, para $\epsilon > 0$ fijo podemos encontrar cubiertas $\{A_{i_k}\}_{k \geq 1}$ de cada subconjunto A_i , tales que

$$\sum_{k \geq 1} P(A_{i_k}) \leq \mathbb{P}^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i};$$

uniendo todas las cubiertas $\{A_{i_k}\}_{k \geq 1}; i \geq 1$ tenemos una cubierta numerable de $\cup_{i \geq 1} A_i$ y así,

$$\mathbb{P}^*(\cup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i, k \geq 1} P(A_{i_k}) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}^*(A_i) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ puede ser tan pequeño como queramos, obtenemos la σ -subaditividad de \mathbb{P}^* . □

La siguiente definición es la clave para la extensión de la medida, se dice que A es \mathbb{P}^* -medible si

$$(3) \quad \mathbb{P}^*(E) = \mathbb{P}^*(A \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E) \quad \forall E \subset \Omega.$$

En cierta forma, un conjunto A es \mathbb{P}^* -medible si el conjunto y su complemento están lo suficientemente separados para dividir cualquier conjunto E de forma aditiva. Notemos además que por la σ -subaditividad de \mathbb{P}^* siempre se tiene una de las dos desigualdades que se deben verificar y lo complicado es probar la segunda, que es

$$(4) \quad \mathbb{P}^*(E) \geq \mathbb{P}^*(A \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E) \quad \forall E \subset \Omega.$$

De modo que para obtener la σ -aditividad en \mathbb{P}^* , habrá que reducir el dominio de nuestra función \mathbb{P}^* a la clase de eventos que sí son \mathbb{P}^* -medibles,

$$\mathcal{A}^* := \{A \in \Omega ; A \text{ es } \mathbb{P}^*\text{-medible}\}.$$

Vamos a demostrar que \mathbb{P}^* restringida a \mathcal{A}^* es una medida de probabilidad que extiende a la función \mathbb{P} , es decir; mostraremos que \mathbb{P}^* es σ -aditiva en \mathcal{A}^* , que es una σ -álgebra que además contiene a \mathcal{A} y finalmente que la medida exterior \mathbb{P}^* y la medida original \mathbb{P} coinciden en el álgebra \mathcal{A} . Esto se obtiene poco a poco.

PROPOSICIÓN 3.2. *La clase \mathcal{A}^* de los eventos \mathbb{P}^* -medibles es un álgebra, y \mathbb{P}^* es finitamente aditiva en \mathcal{A}^* .*

DEMOSTRACIÓN. Verificando directamente la definición de \mathbb{P}^* -medible, vemos que $\Omega \in \mathcal{A}^*$ y por la simetría de (3), la clase \mathcal{A}^* es cerrada bajo complementos. Falta probar la cerradura bajo intersecciones finitas para demostrar que \mathcal{A}^* es un álgebra.

Consideremos A, B dos conjuntos \mathbb{P}^* -medibles y un conjunto cualquiera E ; utilizando la medibilidad de B para separar la medida exterior de E , y luego la de A para separar las medidas resultantes obtenemos

$$\mathbb{P}^*(E) = \mathbb{P}^*(A \cap B \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap B \cap E) + \mathbb{P}^*(A \cap B^c \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap B^c \cap E)$$

los tres últimos sumandos del lado derecho de la igualdad es mayor que la medida de $(A \cap B)^c \cap E$ por la subaditividad de la medida exterior, mostrando que la intersección $A \cap B$ es \mathbb{P}^* -medible porque cumple

$$\mathbb{P}^*(E) \geq \mathbb{P}^*(A \cap B \cap E) + \mathbb{P}^*((A \cap B)^c \cap E).$$

Ahora, \mathbb{P}^* es finitamente aditiva ya que si A y B son eventos disjuntos en \mathcal{A}^* , utilizando que A es \mathbb{P}^* -medible para expresar la medida de $A \cup B$ tenemos

$$\mathbb{P}^*(A \cup B) = \mathbb{P}^*(A \cap (A \cup B)) + \mathbb{P}^*(A^c \cap (A \cup B)) = \mathbb{P}^*(A) + \mathbb{P}^*(B).$$

□

PROPOSICIÓN 3.3. *La clase \mathcal{A}^* de los eventos \mathbb{P}^* -medibles, es una σ -álgebra y \mathbb{P}^* es σ -aditiva en \mathcal{A}^* .*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la unión A de cualquier sucesión numerable de elementos del álgebra \mathcal{A}^* . Ya hemos visto que ésta se puede expresar como la unión de una sucesión $\{A_i\}_{i \geq 1}$ de eventos disjuntos en \mathcal{A}^* . Lo primero que buscamos es ver que A cumple (4) para demostrar que A es \mathbb{P}^* -medible. Ya con la sucesión disjunta definamos, para toda $k \geq 1$, los eventos \mathbb{P}^* -medibles

$$B_k = \cup_{i=1}^k A_i;$$

entonces para cualquier conjunto $E \in \Omega$ y para toda $k \geq 1$ se tiene que

$$\mathbb{P}^*(B_k \cap E) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}^*(A_i \cap E);$$

aunque esta igualdad parece justificarse por la aditividad de \mathcal{A}^* , no sabemos si E es \mathbb{P}^* -medible o no, así que ese argumento sería falso; pero la conclusión se puede obtener por inducción. Para $k = 1$ no hay nada que probar, entonces supongamos que la igualdad es válida para índices menores a k y aplicando la medibilidad de A_k al conjunto $B_k \cap E$ tenemos

$$\mathbb{P}^*(B_k \cap E) = \mathbb{P}^*(A_k \cap E) + \mathbb{P}^*(B_{k-1} \cap E) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}^*(A_i \cap E);$$

se usó la hipótesis de inducción para B_{k-1} .

Ahora, cada uno de los conjuntos \mathbb{P}^* -medibles B_k están contenidos en \mathcal{A} , así que

$$\mathbb{P}^*(E) = \mathbb{P}^*(B_k \cap E) + \mathbb{P}^*(B_k^c \cap E) \geq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}^*(A_i \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E),$$

haciendo k tender a infinito y usando la σ -subaditividad de \mathbb{P}^* , tenemos que la condición difícil (4) se cumple pues

$$(5) \quad \mathbb{P}^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}^*(A_i \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E) \geq \mathbb{P}^*(A \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E).$$

Entonces A es \mathbb{P}^* -medible y muestra que \mathcal{A}^* es una σ -álgebra. Para probar que además \mathbb{P}^* es σ -aditiva en \mathcal{A}^* , podemos despejar la serie en (5) de dos maneras distintas para tener

$$\mathbb{P}^*(E) - \mathbb{P}^*(A^c \cap E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}^*(A_i \cap E) \geq \mathbb{P}^*(A \cap E),$$

que al sustituir $E = A$ nos da la propiedad deseada

$$\mathbb{P}^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}^*(A_i).$$

□

Finalmente, no sólo hemos encontrado una σ -álgebra donde \mathbb{P}^* es una medida de probabilidad, además ésta contiene a $\sigma(\mathcal{A})$ y coincide con P en el álgebra \mathcal{A} .

PROPOSICIÓN 3.4. *Los elementos del álgebra \mathcal{A} son \mathbb{P}^* -medibles, $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(A)$, para toda $A \in \mathcal{A}$ y además $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente con mostrar que se satisface (4) para toda $A \in \mathcal{A}$ y $E \subset \Omega$. Por la definición de \mathbb{P}^* , para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\{B_i\}_{i \geq 1}$, una cubierta de E con elementos de \mathcal{A} tal que

$$\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}^*(E) + \epsilon.$$

Luego, podemos separar la cubierta en $\{A \cap B_i\}_{i \geq 1}$ y $\{A^c \cap B_i\}_{i \geq 1}$ cubiertas de $A \cap E$ y $A^c \cap E$, y como A y B_i son elementos de \mathcal{A} y podemos usar la aditividad de \mathbb{P} y la definición de \mathbb{P}^* para ver que

$$\mathbb{P}^*(A \cap E) + \mathbb{P}^*(A^c \cap E) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}^*(E) + \epsilon,$$

ya que ϵ es arbitrario, obtenemos (4), probando que toda el álgebra \mathcal{A} está contenida en \mathcal{A}^* y por lo tanto

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*.$$

Para ver que las medidas coinciden, probemos que la medida de cualquier evento $A \in \mathcal{A}$ es una cota inferior de su \mathbb{P}^* -medida. Tomando cualquier cubierta $\{A_i\}_{i \geq 1}$ de A con elementos del álgebra, y así podemos usar las propiedades de \mathbb{P} para ver que

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A \cap A_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i),$$

y de hecho es el ínfimo porque el mismo evento A es cubierta de sí mismo; así se obtiene la igualdad deseada

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^*(A).$$

□

Hemos encontrado $\mathbb{P}^* : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, una medida de probabilidad que extiende la medida que teníamos en el álgebra. Cuando hablamos de la extensión de la medida \mathbb{P} no hay ambigüedad pues cualquier otra medida de probabilidad en $\sigma(\mathcal{A})$ que coincida con \mathbb{P}^* en \mathcal{A} es, en realidad, la misma medida por la Proposición 2.5 que habla de la unicidad de medidas de probabilidad que coinciden en un π -sistema.

2. Percolación y Acoplamiento

Ya con una gráfica definida, hay que determinar de manera aleatoria e independiente el **estado** de cada arista e , que puede ser abierto o cerrado con probabilidad p_e y $1 - p_e$ respectivamente; es decir, el estado de las aristas representan variables de tipo Bernoulli con parámetro p_e . En esta sección veremos cómo se construye un espacio de probabilidad asociado al modelo de percolación en \mathbb{L}_d con **probabilidad de conexión**

$\mathbf{p} = (p_e)_{e \in E}$ y cómo este mismo espacio sirve para acoplar todos los modelos de percolación; es decir cómo representar en un mismo espacio el modelo de percolación para cada probabilidad de conexión $\mathbf{p} \in [0, 1]$ posible. Además veremos que en caso de tener una probabilidad de conexión uniforme, la medida que encontremos será invariante bajo traslaciones.

Primero necesitamos un espacio de sucesos Ω donde cada evento elemental ω contenga la información de una **configuración** $K \subset \mathbb{L}_d$, cuyo conjunto de aristas es al que definimos como **aristas abiertas**. Esto se codifica con una sucesión $\omega = (\omega_e)_{e \in E}$ donde

$$\omega_e = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e \text{ está abierta} \\ 0 & \text{si la arista } e \text{ está cerrada,} \end{cases}$$

es decir, ω es la representación analítica de una configuración $K \subset \mathbb{L}_d$. Y ya que las retículas tienen una cantidad numerable de aristas, no perdemos generalidad asumiendo que $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ahora hay que definir una σ -álgebra donde el estado de cada arista $k \in \mathbb{N}$ sea una variable aleatoria. Los candidatos para variables aleatorias son las proyecciones $X_k : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$; $k \in \mathbb{N}$, pues son las que recuperan sólo la información del estado de cada arista. Como la única σ -álgebra (no trivial) de $\{0, 1\}$ está generada por cualquiera de sus elementos, digamos $\{1\}$, entonces la σ -álgebra \mathcal{F} del espacio debe contener al conjunto generador de $\sigma(X_k)$, para toda $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \sigma(E_k^+; k \in \mathbb{N}), \\ E_k^+ &:= \{\omega \in \Omega; \omega_k = 1\}. \end{aligned}$$

Cada una de las variables aleatorias, que a partir de ahora llamaremos simplemente aristas, pueden generar dos eventos, E_k^+ , donde todas las configuraciones deben tener la arista k abierta, y su complemento E_k^- donde se tiene la arista k cerrada,

$$E_k^- := \{\omega \in \Omega : \omega_k = 0\}.$$

Los eventos generados por un conjunto finito de aristas se pueden expresar como la unión de rectángulos, éstos son eventos que agrupan a todas las configuraciones que coinciden con las primeras k aristas de una configuración w dada; formalmente, para $w = (w_i)_{i \geq 1}$ definimos su **rectángulo de rango k** como

$$w^k := \{\omega \in \Omega; \omega_i = w_i, i \leq k\}.$$

Tomar una configuración completa hará la notación más fácil en el capítulo siguiente, pero en realidad para definir un rectángulo de rango k necesitamos una sucesión de k

aristas que pertenezca a $\{0, 1\}^k$. Al unir varios rectángulos del mismo rango obtenemos cilindros; un *cilindro* de *base* $B \subset \{0, 1\}^k$ es

$$C_B := \{\omega \in \Omega; (\omega_i)_{i \leq k} \in B\}.$$

Es claro que estos rectángulos y cilindros forman parte de la σ -álgebra generada por las primeras k aristas, que denotaremos \mathcal{F}_k . Además todos los eventos de \mathcal{F}_k se pueden expresar como los cilindros de arriba con una base adecuada: un rectángulo w^k es la intersección de los generadores de \mathcal{F}_k y los cilindros C_B son uniones de rectángulos,

$$w^k = \bigcap_{i \leq k} E_i^{\sigma_i}, \quad C_B = \bigcup_{w \in B} w^k,$$

donde σ_i es positivo si $w_i = 1$ y negativo si $w_i = 0$. Así, los eventos más pequeños que las primeras k aristas pueden generar son los rectángulos w^k con $w \in \{0, 1\}^k$; y entonces cualquier evento en \mathcal{F}_k se puede expresar como la unión disjunta de estos eventos mínimos; de modo que la clase de los eventos finitamente generados se puede expresar como

$$\mathcal{F}_0 = \{C_B \subset \Omega : B \subset \{0, 1\}^k; k \in \mathbb{N}\},$$

porque cualquier evento $A \in \mathcal{F}_S$, S finito, también pertenece a \mathcal{F}_k donde k es el máximo de los índices de las aristas en S . Ésta es el álgebra que nos ayudará a definir la medida de probabilidad en todo el espacio.

La medida que buscamos es una función que debe asignar probabilidad p_k al evento E_k^+ . Además queremos que las aristas resulten ser independientes, entonces la medida de un rectángulo debe ser el producto de las probabilidades de las aristas que lo definen. Y por último, para que la probabilidad sea aditiva, definimos la probabilidad de un cilindro como sigue,

$$\mathbb{P}(w^k) = \prod_{\substack{i \leq k \\ w_i=1}} p_i \prod_{\substack{i \leq k \\ w_i=0}} (1 - p_i), \quad \mathbb{P}(C_B) = \sum_{w \in B} \mathbb{P}(w^k).$$

Así hemos definido una función \mathbb{P} en \mathcal{F}_0 , para extenderla al σ -álgebra con el método de Carathéodory es importante asegurarnos de que \mathbb{P} está bien definida y cumple las propiedades de una medida de probabilidad en \mathcal{F}_0 . Ésto lo veremos a continuación.

TEOREMA 3.5. *La función $\mathbb{P} : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\mathbb{P}(C_B) = \sum_{w \in B} \prod_{\substack{i \leq k \\ \omega_i=1}} p_i \prod_{\substack{i \leq k \\ \omega_i=0}} (1 - p_i),$$

es una medida de probabilidad en \mathcal{F}_0 .

DEMOSTRACIÓN. Estamos representando a un evento en \mathcal{F}_0 con un cilindro generado, digamos, por las k primeras aristas, pero también es cierto que está generado por las primeras k' aristas, donde $k \leq k'$. Por supuesto que las aristas $k+1, \dots, k'$ en realidad no son necesarias para generar al evento, pero muestra que existe otra forma de expresar al evento como cilindro. Entonces, lo primero que hay que verificar es que a los cilindros que expresan un mismo evento se les asignó la misma probabilidad.

Notemos que cualquier rectángulo w^k , $k \in \mathbb{N}$ es la unión disjunta de dos rectángulos w_+^{k+1} y w_-^{k+1} , donde

$$w_+ := (w_1, \dots, w_k, 1), \quad w_- := (w_1, \dots, w_k, 0).$$

Como estas configuraciones coinciden en las primeras k aristas, la probabilidad w_+^{k+1} y w_-^{k+1} se obtiene multiplicando la de w^k por la probabilidad de tener la arista $k+1$ abierta o cerrada, respectivamente, pero estas probabilidades suman uno y así

$$\mathbb{P}(w^k) = \mathbb{P}(w_+^{k+1}) + \mathbb{P}(w_-^{k+1}).$$

Luego, la intersección de dos rectángulos ω^{k+1} y w^k puede ser vacía si las configuraciones ω y w difieren en alguna de sus primeras k aristas; o puede ser ω^{k+1} si $\omega^{k+1} \subset w^k$, pues éste contiene a todas las configuraciones que coinciden con w en las primeras k aristas que además su arista $k+1$ coincide con ω_{k+1} ; entonces ω^{k+1} debe ser uno de los dos rectángulos que definimos arriba.

Ahora, dado un cilindro con dos representaciones $C_B = C_{B'}$, mostraremos con inducción sobre la diferencia entre sus rangos, k y k' , que sus probabilidades coinciden. Supongamos que la diferencia es uno; ya que sus bases representan a todos los rectángulos de rango k y $k+1$ que forman al cilindro, es claro que las bases se relacionan de la siguiente manera

$$B' = B \times \{0, 1\}.$$

Ahora, calculando las probabilidades de los dos cilindros, que son la suma de las medidas de los rectángulos que los forman, tenemos

$$\sum_{w \in B} \mathbb{P}(w^k) = \sum_{w \in B} (\mathbb{P}(w_+^{k+1}) + \mathbb{P}(w_-^{k+1})) = \sum_{w \in B'} \mathbb{P}(w^{k+1}).$$

Supongamos que la diferencia entre los rangos k y k' es mayor que uno, entonces podemos expresar al mismo cilindro con una base de rango $k' - 1$

$$D = B \times \{0, 1\}^{k'-k-1};$$

por hipótesis de inducción se les asignó la misma medida a C_B y C_D y por lo que vimos arriba, la nueva expresión del cilindro coincide con la de $C_{B'}$ y tienen la misma probabilidad. Por lo tanto \mathbb{P} está bien definida para todos los eventos de \mathcal{F}_0 . Además,

podemos expresar dos cilindros disjuntos, C_B y $C_{B'}$, como dos uniones disjuntas de rectángulos, de modo que $B \cap B' = \emptyset$, entonces

$$\mathbb{P}(C_B \cup C_{B'}) = \sum_{w \in B} \mathbb{P}(w^k) + \sum_{w \in B'} \mathbb{P}(w^k) = \mathbb{P}(C_B) + \mathbb{P}(C_{B'}).$$

Ésto muestra que \mathbb{P} es finitamente aditiva. Y apoyándonos en esta propiedad, si consideramos un cilindro C expresado como la unión de una sucesión $\{C_i\}_{i \geq 1}$ de cilindros disjuntos, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(C_i) + \mathbb{P}(\cup_{i>k} C_i),$$

tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ tendremos que la medida del cilindro C es la serie de las medidas de los cilindros C_i ; $i \geq 1$, más el límite de la probabilidad de B_k :

$$B_k = \cup_{i \geq k+1} C_i,$$

$$\mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} C_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(C_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_k).$$

Notemos que el límite de $\{B_k\}_{k \geq 1}$, es vacío y para que \mathbb{P} sea σ -aditiva, el límite de sus medidas debe ser cero,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} B_k);$$

esto es, debemos asegurar que dada una sucesión decreciente de cilindros cuyo límite es el vacío, entonces el límite de sus probabilidades sea cero; a esta propiedad se le suele llamar **continuidad en \emptyset** .

Supongamos lo contrario. Es decir, existe una sucesión decreciente de cilindros cuyo límite de sus probabilidades es mayor a cero, entonces ningún cilindro de la sucesión es vacío. Por otro lado, en el lema siguiente mostramos que si el límite de una sucesión decreciente de cilindros no vacíos es un cilindro, entonces éste es no vacío. Con esto, tendríamos por un lado que el límite de esta sucesión es un cilindro no vacío y por otro lado que su probabilidad es cero; esto es una contradicción por la definición de nuestra medida de probabilidad.

Así, las probabilidades de B_k , $k \geq 1$ tienden a cero como queríamos y \mathbb{P} es σ -aditiva en el álgebra \mathcal{F}_0 . \square

Aquí fue necesario utilizar el siguiente lema.

LEMA 3.6. *Si $\{C_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión decreciente de cilindros no vacíos cuyo límite es un cilindro C , entonces C es no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos un proceso similar al de la diagonal de Cantor. Ya que los cilindros son no vacíos, podemos considerar una configuración ω^i en cada cilindro C_i ; $i \geq 1$. Definiremos una configuración $\omega^0 = (u_1, u_2, \dots)$ de la siguiente forma:

Ya que las entradas de cada configuración pueden adoptar solamente 0 ó 1, al menos uno de los dos valores, digamos u_1 , es la primera entrada de una infinidad de rectángulos de la sucesión $\{\omega^i\}_{i \geq 1}$, es decir, existe una subsucesión de los rectángulos $\{\omega^{1,i}\}_{i \geq 1}$, tal que $\omega_1^{1,i} = u_1$ para toda $i \geq 1$.

Ahora, también para esta sucesión existe un valor u_2 y una subsucesión $\{\omega^{2,i}\}_{i \geq 1}$ de rectángulos que además cumple que $\omega_2^{2,i} = u_2$; siguiendo con este proceso construimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{\omega^{n,i}\}_{i \geq 1}$ que cumple $\omega_j^{n,i} = u_j$ para toda $j \leq n$, con valores u_j adecuados.

Ahora veamos que ω^0 pertenece a cada cilindro C_i ; si el cilindro está generado por las primeras n aristas, tomamos los cilindros de la sucesión $\{\omega^{n,j}\}_{j \geq 1}$ que construimos arriba, y debe existir uno que esté contenido en C_i , porque es una subsucesión de la sucesión C_i , $i \geq 1$ decreciente de cilindros. De forma que, para algún cilindro $C_{n,j}$, $j \in \mathbb{N}$ y un rectángulo w^n en ese cilindro, tenemos

$$\omega^{n,j} \subset w^n \subset C_{n,j} \subset C_i.$$

Así, el rectángulo w^n depende sólo de las primeras n aristas y éstas coinciden con las de $\omega^{n,j}$ que a su vez coinciden con las de ω^0 , como esto ocurre para cualquier $i \in \mathbb{N}$, tenemos que ω^0 es un elemento de la intersección de los cilindros C_i , es decir $C \neq \emptyset$. \square

Con estas dos proposiciones hemos visto que \mathbb{P} es una medida de probabilidad en un álgebra que genera la σ -álgebra con la que trabajamos; así, con el método de Carathéodory podemos extender la medida a toda la σ -álgebra.

Que el estado de cada arista es independiente de las demás es equivalente a verificar que los eventos $\{E_k^+\}_{k \geq 1}$ son independientes; pues podemos aplicar el Teorema 2.9 sobre independencia a estos eventos, que son un π -sistema para cada σ -álgebra generada por cada una de las aristas. Efectivamente, éstos son independientes porque construimos la medida \mathbb{P} con esta característica.

La probabilidad \mathbb{P} depende de la probabilidad de conexión $\mathbf{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de cada arista. En nuestros modelos este valor es uniforme, $p_k = p$ para toda $k \in \mathbb{N}$; y denotaremos a su medida de probabilidad \mathbb{P}_p , ó \mathbb{P}_p^d si también nos interesa recordar que la gráfica del modelo es \mathbb{L}_d .

Además cuando la probabilidad de conexión es homogénea, aunado a la invariancia de la retícula bajo traslaciones, asignamos la misma probabilidad a eventos que en esencia son iguales. Dado un evento $A \in \mathcal{F}$, su **trasladado por x** , $A+x$; reúne a todas

las configuraciones de A pero trasladadas todas por el vector fijo x con coordenadas enteras.

LEMA 3.7 (Invariancia de la medida). *En el modelo de percolación con probabilidad de conexión p uniforme, cualquier evento $A \in \mathcal{F}$ tiene la misma probabilidad que cualquiera de sus trasladados.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que todo el espacio completo es invariante bajo traslaciones por cualquier vector $x \in \mathbb{Z}^2$, y

$$(A + x)^c = A^c + x, \quad (\cup_{i \geq 1} A_i) + x = \cup_{i \geq 1} (A_i + x).$$

Entonces la clase \mathcal{D} de los eventos que son invariantes bajo traslaciones forman un sistema de Dynkin pues el total como evento ya es invariante bajo traslaciones y, por las ecuaciones de arriba, también es cerrado bajo diferencias propias y uniones numerables monótonas.

Por otro lado, la clase \mathcal{F}_0 de los rectángulos finitos es un π -sistema, y los rectángulos son invariantes bajo traslaciones porque son intersección de los eventos independientes $E_k^{\sigma_k}$ que al trasladarse por un vector x se convierten en eventos de la misma forma $E_j^{\sigma_k}$ para alguna $j \in \mathbb{N}$ y así conservan la misma probabilidad p porque la medida es homogénea.

Entonces, por el Teorema 2.2 tenemos que la σ -álgebra generada \mathcal{F} por los rectángulos es invariante bajo traslaciones. \square

Ahora necesitamos un espacio que reúna los modelos de percolación para una gráfica con distintas probabilidades de conexión; esto es, un acoplamiento de todos los modelos. A continuación veremos que existe un espacio donde están definidas una cantidad numerable de variables aleatorias uniformes en el $[0, 1]$ para luego mostrar que con éstas se pueden recuperar los modelos que construimos antes.

Se puede seguir un proceso de extensión de la medida como en la sección anterior, pero es más sencillo utilizar el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{1/2})$, que cuenta con una infinidad de variables independientes de tipo Bernoulli y parámetro $1/2$ para construir las variables aleatorias que queremos. Primero mostraremos que esto se puede lograr para una sola variable uniforme U en el intervalo $[0, 1]$.

PROPOSICIÓN 3.8. *La función $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{1/2}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$ definida como*

$$U(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i},$$

es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos probar que U sí es una función medible y que la probabilidad que le induce el primer espacio es uniforme, es decir, la probabilidad de cada intervalo es igual a su longitud.

Para empezar, la serie que define a $U(\omega)$ es convergente porque la serie es menor a la serie de potencias de $1/2$, de modo que para toda $\omega \in \Omega$,

$$0 \leq U(\omega) \leq 1.$$

Para ver que es medible, aproximamos U con sus sumas parciales que son una sucesión creciente de funciones medibles; $S_k : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{1/2}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$ con

$$S_k(\omega) := \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i}{2^i}.$$

Notemos que los valores que toma la función son $S_k(\Omega) = \{\frac{0}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}\}$, así que la preimagen de cualquier intervalo (a, b) es la preimagen de los puntos en $S_k(\Omega)$ que caen dentro del intervalo que nos interesa:

$$S_k^{-1}(a, b) = \bigcup_{a < \frac{n}{2^k} < b} S_k^{-1}\left(\frac{n}{2^k}\right);$$

la única forma de que $S_k(\omega) = \frac{n}{2^k}$ es que ω coincida con $(n_i)_{i \leq k}$; donde $\frac{n}{2^k} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2^i}$, entonces

$$S_k^{-1}\left(\frac{n}{2^k}\right) = \{\omega \in \Omega; \omega_i = n_i, i \leq k\},$$

que es la definición de un rectángulo, de modo que $S_k^{-1}(a, b)$ es la unión de eventos medibles y efectivamente, S_k es una función medible para toda $k \geq 1$. Como además la sucesión $\{S_k\}_{k \geq 1}$ es creciente y su límite es U , podemos usar la Proposición 2.8 para asegurar que U es medible. Esa misma proposición nos permite aproximar la medida de $U^{-1}(a, 1]$ como

$$\mathbb{P}_{1/2}(U^{-1}(a, 1]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{1/2}(S_k^{-1}(a, 1]).$$

Ahora, el número de rectángulos que tiene cada preimagen $S_k^{-1}(a, 1]$ se puede calcular fácilmente con el primer elemento s_k de $\{n \in \mathbb{N}; a < \frac{n}{2^k}, n < 2^k\}$ pues este conjunto es exactamente la imagen del intervalo que nos interesa y tiene en total $2^k - s_k$ elementos y así, la preimagen está compuesta de $2^k - s_k$ rectángulos disjuntos cuya medida es la intersección de k eventos de probabilidad $1/2$, entonces

$$\mathbb{P}_{1/2}(S_k^{-1}(a, 1]) = \frac{2^k - s_k}{2^k} = 1 - \frac{s_k}{2^k};$$

notemos además que $\frac{s_k}{2^k} - a \leq \frac{1}{2^k}$ porque s_k es el primer elemento de la imagen, así al tomar el límite $k \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\mathbb{P}_{1/2}(U^{-1}(a, 1]) = 1 - a.$$

Con esto ya sabemos que la variable U tiene distribución uniforme; por el Teorema de unicidad 2.5, basta comprobar que la medida en un π -sistema corresponde a la de Lebesgue y ya habíamos visto que la clase de intervalos $(a, 1] \subset [0, 1]$ es un π -sistema que genera a los borelianos del intervalo $[0, 1]$. \square

Hemos demostrado que podemos crear una variable uniforme en el $[0, 1]$ a partir de una cantidad numerable de variables independientes Bernoulli de parámetro $1/2$. Para encontrar una cantidad numerable de éstas variables sólo hay que reorganizar nuestras variables Bernoulli con una biyección $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; renombramos las entradas de nuestras configuraciones $\omega = (\omega_i)_{i \geq 1}$ haciendo $\omega_i^n = \omega_{\phi(i,n)}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la variable $U_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{1/2}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$ como

$$U_n(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i^n}{2^i}.$$

Por la proposición anterior, cada una de estas variables U_n tiene distribución uniforme en el $[0, 1]$ y por su definición, sólo depende de las entradas con índice $\phi(i, n)$; es decir, su σ -álgebra generada es

$$\sigma(U_n) = \sigma(E_{\phi(i,n)}^+; i \geq 1).$$

Finalmente, el Teorema 2.10 nos permite agrupar colecciones de σ -álgebras independientes, de modo que $\{\sigma(U_n)\}_{n \geq 1}$ son independientes como queríamos.

Ya que tenemos un espacio $(X, \mathcal{F}', \mathbb{P}) := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{1/2})$ donde están definidas una cantidad numerable de variables aleatorias independientes $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, podemos utilizarlo como acoplamiento de todos los modelos de percolación en la retícula \mathbb{L}_d de la siguiente forma: a los elementos $u \in X$ les asociamos una gráfica aleatoria ω del siguiente modo, a cada arista ω_k le asignamos

$$\omega_k := \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \leq p \\ 0 & \text{si } u_k > p. \end{cases}$$

Así, la probabilidad de encontrar una arista abierta es p , como en el modelo de percolación que usamos. Esta forma de atacar el problema es muy útil, pues en cada realización uno puede ver qué pasa si el parámetro p es más chico o más grande. Más formalmente,

PROPOSICIÓN 3.9. *Para cada p , tenemos una función medible $G_p : (X, \mathcal{F}', \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$, $u \mapsto \omega$, con*

$$\omega_k = \chi_{[0,p]}(u_k)$$

cuya distribución coincide con la medida de probabilidad \mathbb{P}_p del modelo de percolación con parámetro p .

DEMOSTRACIÓN. Para toda $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima arista de $G_p(u)$ está abierta si y sólo si $U_k \in [0, p]$, entonces por la construcción del espacio (X, \mathcal{F}') los conjuntos $G_p^{-1}(E_k^+)$ pertenecen a la σ -álgebra \mathcal{F}' y además

$$\mathbb{P}(G_p^{-1}(E_k^+)) = \mathbb{P}(U_k \in [0, p]) = \mathbb{P}_p(E_k^+).$$

□

El acoplamiento nos permite comparar el comportamiento de los procesos al variar el parámetro p porque para cada realización, las aristas que están abiertas en una gráfica permanecen abiertas al aumentar p y entonces la gráfica aleatoria $G_p(u)$ está contenida en $G_{p'}(u)$, si $p \leq p'$.

Umbrales

Gracias al acoplamiento que construimos podemos observar cómo cambia la probabilidad de un evento dado según aumenta la probabilidad de conexión. Daremos un orden a nuestro espacio de configuraciones bajo el cual, existe cierta monotonía respecto a la probabilidad de conexión; con esto definiremos a los eventos crecientes y mostraremos 3 de sus propiedades: que son monótonos, positivamente correlacionados y que poseen un umbral; es decir, un parámetro de conexión en donde su probabilidad sufre un cambio drástico. En los siguientes secciones se define la frontera de un evento creciente y se relaciona con los eventos infinito y se liga su medida con el cambio de probabilidad del evento, finalmente se usan estos resultados para presentar la ley de aproximación a 0-1 de Russo, así como una ley similiar debida a Talagrand.

Se dice que una configuración es mayor que otra, $\omega \leq w$ si y sólo si $\omega_i \leq w_i$ para toda $i \geq 1$. Y un *evento creciente* A es aquél que para toda $\omega \in A$, si $\omega \leq w$ entonces $w \in A$.

OBSERVACIÓN. Tanto la unión como la intersección de eventos crecientes $\{A_i\}_{i \in I}$ es creciente.

Para la percolación es razonable pensar en eventos crecientes, pues si una configuración ya tiene abiertas las aristas necesarias para pertenecer a A (una propiedad dada), entonces también las configuraciones mayores pertenecen a A porque al menos tienen las mismas aristas abiertas. Así, las configuraciones de un evento creciente A están cargadas hacia las que tienen muchas aristas abiertas, estas configuraciones comienzan teniendo probabilidad despreciable si el parámetro está muy cerca de 0 y va aumentando hasta a 1 conforme las aristas abiertas tienen mayor probabilidad de ser.

Por eso, la medida de los eventos crecientes es monótona creciente respecto a la probabilidad de conexión.

PROPOSICIÓN 4.1. *Si A es un evento creciente en \mathcal{F} , entonces si $p \leq p'$,*

$$\mathbb{P}_p(A) \leq \mathbb{P}_{p'}(A).$$

DEMOSTRACIÓN. Con ayuda del acoplamiento del capítulo anterior, comparar estas dos probabilidades es equivalente a demostrar que $G_p^{-1}(A) \subset G_{p'}^{-1}(A)$. Y esto sucede cuando A es un evento creciente, porque si $G_p(u)$ pertenece a A , como $G_p(u) \leq G_{p'}(u)$, tenemos que $G_{p'}(u)$ también pertenece a A . \square

Ya que los eventos crecientes están cargados hacia las configuraciones con más aristas, es natural pensar que están positivamente correlacionados; es decir, la probabilidad de un evento creciente aumenta si se condiciona a la presencia de otro evento creciente, pues a grandes rasgos implica que la configuración tiene suficientes aristas abiertas. De modo que si A y B son eventos crecientes esperamos que

$$\mathbb{P}_p(A|B) \geq \mathbb{P}_p(A);$$

Harris demostró esta relación para eventos finitamente generados.

LEMA 4.2 (de Harris). *Sean A y B eventos crecientes en \mathcal{F}_k , $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A \cap B) \geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A)\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(B).$$

DEMOSTRACIÓN. Se usará el parámetro $\mathbf{p} = (p_k)_{k \geq 1}$, porque este resultado no necesita que la probabilidad de conexión sea uniforme, para facilitar la notación haremos $\mathbb{P}_{\mathbf{p}} = \mathbb{P}$. El lema se probará por inducción sobre k .

Para $k = 1$, de los eventos de la σ -álgebra $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, E_1^-, E_1^+, \Omega\}$ sólo E_1^- no es un evento creciente pues éste contiene a las configuraciones cuya primera arista está cerrada entonces cualquiera de esas configuraciones pero con la arista abierta es mayor a la configuración original y no pertenece a E_1^- . Por otro lado, es claro que tanto el vacío como el total son crecientes y el evento E_1^+ es creciente porque en cualquiera de sus configuraciones la primera arista está abierta, entonces en cualquier otra configuración mayor a ellas también estará abierta, es decir, también pertenecerá a E_1^+ .

Ahora, si alguno de los eventos crecientes es Ω ó \emptyset , la desigualdad se vuelve trivial y en otro caso, buscamos que $\mathbb{P}(E_1^+) \geq \mathbb{P}(E_1^+)^2$, entonces es claro que la desigualdad es válida para $k = 1$.

Para cualquier evento $A \in \mathcal{F}_k$, $k \geq 2$, existen eventos $A_k^+, A_k^- \in \mathcal{F}_{k-1}$ tal que

$$A = (A_k^+ \cap E_k^+) \cup (A_k^- \cap E_k^-)$$

Se construyen de la siguiente forma: como el evento A está finitamente generado, se puede expresar como la unión de rectángulos ω^k . Así que separando estos rectángulos

4. UMBRALES

en dos grupos, los que pidan que la k -ésima arista esté abierta y los que piden que esté cerrada, consideramos ω^{k-1} de modo que al intersectarlos con E_k^+ ó E_k^- se recupere el rectángulo que está contenido en A . Así,

$$A_k^+ := \bigcup_{\substack{\omega^k \subset A \\ \omega_k=1}} \omega^{k-1} \qquad A_k^- := \bigcup_{\substack{\omega^k \subset A \\ \omega_k=0}} \omega^{k-1}$$

Además, si A es un evento creciente, entonces $A_k^- \subset A_k^+$ y ambos son eventos crecientes. Uno contiene al otro porque por cada rectángulo en A que tenga la k -ésima arista cerrada, habrá otro rectángulo en A que tenga la arista abierta, de modo que ambos rectángulos A_k^- , A_k^+ contiene al mismo rectángulo de rango $k-1$: ω^{k-1} . Luego, A_k^+ es creciente porque al tener dos configuraciones cualquiera $\omega \leq w$ podemos tomar la misma pareja pero haciendo que las dos aristas k estén abiertas, de modo que si la primera configuración ya pertenece al evento A , entonces también la segunda; las configuraciones originales, ω y w , formarían parte de dos rectángulos que al intersectarse con E_k^+ pertenecen al evento A , es decir, $w \in A_k^+$ si $\omega \in A_k^+$. Del mismo modo podemos ver que A_k^- es creciente si consideramos ahora la pareja de ω y w que tengan la k -ésima arista cerrada.

Luego, como \mathcal{F}_{k-1} es independiente de E_k^+ y E_k^- tenemos

$$\mathbb{P}(A) = p_k \mathbb{P}_p(A_k^+) + (1 - p_k) \mathbb{P}(A_k^-)$$

Ahora, si el lema es válido para dimensiones menores que k ; ya que la intersección de dos eventos se puede expresar como

$$A \cap B = ((A_k^+ \cap B_k^+) \cap E_k^+) \cup ((A_k^- \cap B_k^-) \cap E_k^-)$$

si A y B son crecientes podemos usar la hipótesis de inducción y la igualdad de arriba para ver que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq p_k \mathbb{P}(A_k^+) \mathbb{P}(B_k^+) + (1 - p_k) \mathbb{P}(A_k^-) \mathbb{P}(B_k^-)$$

sumando

$$p_k(1 - p_k)(\mathbb{P}(A_k^+) - \mathbb{P}(A_k^-))(\mathbb{P}(B_k^+) - \mathbb{P}(B_k^-)) \geq 0$$

y reagrupando tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &\geq [p_k \mathbb{P}(A_k^+) + (1 - p_k) \mathbb{P}(A_k^-)] [p_k \mathbb{P}(B_k^+) + (1 - p_k) \mathbb{P}(B_k^-)] \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

que prueba el lema de Harris para cualquier $k \in \mathbb{N}$. \square

Se puede generalizar el lema de Harris a un conjunto finito de eventos crecientes finitamente generados; si A_1, \dots, A_n son eventos crecientes de \mathcal{F}_0 entonces

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\cap_{i \leq n} A_i) \geq \prod_{i \leq n} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A_i)$$

como se trata de una colección finita de eventos, existe una σ -álgebra \mathcal{F}_k finitamente generada que contiene a toda la colección. El resultado se obtiene por inducción sobre el número de eventos crecientes, la base de inducción es el lema de Harris y el paso inductivo se obtiene notando que $\cap_{i \leq n} A_i$ se puede expresar como la intersección de dos eventos crecientes para los cuales la desigualdad es válida.

1. Frontera y Conjunto Esencial

Algunos eventos crecientes se parecen a los eventos infinito en el sentido de que su probabilidad, como función de p , en los extremos es prácticamente 0 ó prácticamente 1; así, buscamos caracterizar los eventos crecientes que poseen un intervalo en donde sucede un cambio repentino en su probabilidad, a este intervalo se le conoce como **ventana del umbral**. Existen varios resultados que giran en torno de estos conceptos; aquí introducimos el concepto de frontera, mostramos que la ausencia de frontera caracteriza a los eventos infinito y se relaciona la medida de la frontera con el cambio de la probabilidad de un evento creciente.

Cuando se trata de un evento infinito y creciente E , su probabilidad por un lado sólo puede ser 0 ó 1 y por otro, es creciente respecto a p , entonces existe un punto llamado **umbral** en donde la probabilidad deja de ser cero y pasa a ser uno. Las condiciones que Russo propuso en su ley de aproximación a 0-1 tienen que ver con qué tanto se parecen los eventos crecientes a los eventos infinito, que no dependen de ninguna arista en particular, es decir, ninguna arista es esencial al decidir si una configuración pertenece o no al evento.

Para medir esta característica definimos para cada configuración $\omega \in \Omega$, su **configuración i -par** $S_i \omega$, que es aquélla que coincide con todas las aristas de ω , excepto en la i -ésima donde tienen estados distintos; también será útil diferenciar entre la que

tiene su i -ésima arista abierta o cerrada y las denotaremos ω^{i+} y ω^{i-} , respectivamente. Ahora definimos, para toda $i \in \mathbb{N}$ y cualquier evento $A \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \delta_i^I A &= \{\omega \in A : S_i \omega \notin A\} & \delta_i^E A &= \{\omega \in \Omega \setminus A : S_i \omega \in A\} & \delta_i A &= \delta_i^I A \cup \delta_i^E A \\ \delta^I A &= \cup_{i \geq 1} \delta_i^I A & \delta^E A &= \cup_{i \geq 1} \delta_i^E A & \delta A &= \delta^I A \cup \delta^E A \end{aligned}$$

Como la simboología sugiere, δA puede considerarse la **frontera** de A ; es decir, aquellas configuraciones que al cambiar una arista de estado, pasa de pertenecer al evento A a pertenecer a su complemento $\Omega \setminus A$. La frontera se puede dividir de varias formas; entre ellas está la **frontera interior**, $\delta^I A$, que son las configuraciones que están en el evento pero que alguno de sus i -pares ya no está; y la **i -frontera** $\delta_i A$ contiene a los eventos que, a causa del estado de la arista i están o no en dicho evento, su probabilidad, $\mathbb{P}_p(\delta_i A)$ se conoce como **influencia** de la arista i en el evento A .

Ahora podemos caracterizar los eventos infinito como aquéllos que carecen de frontera o aristas esenciales.

LEMA 4.3. *Un evento $E \in \mathcal{F}_\infty$ si y sólo si $\delta_i E = \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostremos que si $E \in \mathcal{F}_S$ entonces para cualquier $i \notin S$, entonces $\delta_i E = \emptyset$. E se puede expresar como

$$E = \{\omega \in \Omega : (\omega_i)_{i \in S} \in B\},$$

con B medible en $\{0, 1\}^S$. De modo que para cualquier configuración ω , si $i \notin S$ entonces

$$\omega \in E \text{ si y sólo si } S_i \omega \in E,$$

pues tenemos que $(\omega_k)_{k \in S} = (S_i \omega_k)_{k \in S}$ y así, su i -frontera es nula, $\delta_i E = \emptyset$. Aplicando esto a $S = \mathbb{N} \setminus \{i\}$ tenemos la condición necesaria.

Para ver que $\delta_i E = \emptyset$, para toda arista i es una condición suficiente para asegurar que $E \in \mathcal{F}_\infty$; consideremos \mathcal{S} la clase

$$\mathcal{S} := \{S \in \mathbb{N} \text{ finito} : E \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus S}\}.$$

Supongamos que $\delta_i E = \emptyset$ para toda i pero que $E \notin \mathcal{F}_\infty$, entonces este conjunto es no vacío y podemos escoger $S \in \mathcal{S}$ de cardinalidad mínima. Como $E \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, entonces $S \neq \emptyset$ y podemos escoger un elemento $i \in S$. Por la minimalidad de S , para $S' = S \setminus \{i\}$ se cumple que $E \in \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus S'}$ y así

$$E = \{\omega \in \Omega : (\omega_j)_{j \notin S'} \in B'\},$$

con B' medible en $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \setminus S'}$. Tenemos por hipótesis que si $\omega \in E$ entonces cualquier i -par de ω pertenece a E , entonces $(\omega_j)_{j \notin S'} \in B'$ sin importar el valor de la i -ésima arista, entonces $B' = B \times \{0, 1\}$ con B medible en $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \setminus S}$, así

$$E = \{\omega \in \Omega : (\omega_j)_{j \notin S} \in B\};$$

es decir, $E \in \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus S}$; que es una contradicción, por lo tanto E sí es un evento infinito. \square

Por otra parte, para medir el cambio de la probabilidad de un evento A usamos, si existe, la derivada de la probabilidad como función de p . Margulis y Russo obtuvieron una forma explícita de la derivada para los eventos crecientes finitamente generados que relaciona la probabilidad de un evento creciente con sus aristas esenciales.

Para cada evento $A \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega$, el **conjunto esencial**, $C_A(\omega)$, reúnen a las aristas de ω , que son esenciales para que la configuración pertenezca a A o no. Formalmente,

$$C_A(\omega) := \{i \in \mathbb{N}; \omega \in \delta_i A\}, \quad \eta_A(\omega) := |C_A(\omega)|.$$

Notemos que la cardinalidad del conjunto es un indicador de qué tan frágil es la configuración ω o qué tantas nuevas configuraciones de A podemos encontrar; cuando se tienen muy pocas o demasiadas aristas abiertas no es muy probable que una de ellas marque la diferencia para pertenecer o no al evento que nos interesa; sin embargo, a medida que la proporción entre aristas abiertas y cerradas es más homogénea, se espera tener más aristas esenciales; es decir, al aumentar el valor esperado de $\eta_A(\omega)$, la derivada de $\mathbb{P}_p(A)$ aumenta, dando lugar a un intervalo donde el cambio es drástico, esto sugiere el resultado siguiente.

PROPOSICIÓN 4.4 (Fórmula de Margulis-Russo). *Un evento creciente $A \in \mathcal{F}_0$ finitamente generado cumple*

$$\mathbb{E}_p(\eta_A) = \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A).$$

DEMOSTRACIÓN. El número de aristas esenciales se puede contar mediante la suma de funciones indicadoras de las i -fronteras; por la linealidad de la esperanza y por tratarse de indicadoras, el valor esperado de η_A es igual a una serie de probabilidades:

$$\mathbb{E}_p(\eta_A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_p(\delta_i A).$$

Pero como se trata de un evento finitamente generado, entonces $A \in \mathcal{F}_k$ con $k \in \mathbb{N}$, de modo que la i -frontera es vacía para $i > k$, pues A es independiente de cualquier arista fuera del conjunto generador. Esto reduce nuestra serie a k sumandos. Por un

momento distingamos la probabilidad de conexión de cada arista p_i ; así estamos usando $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Ahora separemos el evento A , en dos conjuntos: $\delta_i^I A$ y $A \setminus \delta_i^I A$. Por un lado tendremos que $\delta_i^I A$ cumple

$$\delta_i^I A = E_i^+ \cap \delta_i A$$

porque al tratarse de un evento creciente, si una configuración está en A y en la i -frontera, tiene que tener abierta la i -ésima arista. Por otro lado, el conjunto restante, $A \setminus \delta_i^I A$, no depende de la arista i porque para cualquier pareja de configuraciones ω y $S_i \omega$ ambas pertenecen al evento A o ninguna lo hace. Así, para toda $i \in \mathbb{N}$, derivando la probabilidad del evento respecto al parámetro p_i tenemos

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A) = \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(E_i^+ \cap \delta_i A) + \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A \setminus \delta_i A) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\delta_i A);$$

pero para $i > k$, la derivada respecto a p_i es nula porque la influencia de dicha arista es cero. Entonces, retomando la probabilidad de conexión uniforme $\mathbf{p} = (p)_{i \in \mathbb{N}}$ tenemos

$$\mathbb{E}_p(\eta_A) = \sum_{i \leq k} \mathbb{P}_p(\delta_i A) = \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A).$$

□

2. Medida de la Frontera y Umbrales

La relación entre la esperanza de la cardinalidad del conjunto esencial y la derivada de la probabilidad para eventos finitamente generados nos induce a pensar que las características de la frontera de un evento influyen en la calidad de su ventana de umbral, de modo que la relación entre la medida del evento respecto a la medida de la frontera interior se utiliza para dar una primera ventana de umbral para eventos crecientes.

TEOREMA 4.5 (Primera ventana). *Dado $\epsilon > 0$ y un evento creciente $A \in \mathcal{F}$, si $\mathbb{P}_{p_0}(A) \geq \epsilon$ y $\mathbb{P}_{p_0}(\delta^I A) < \epsilon^3$, entonces*

$$\mathbb{P}_p(A) \geq 1 - \epsilon \quad \forall p \geq p_0 + \epsilon.$$

Para ello introduciremos un orden en la clase de las medidas de (Ω, \mathcal{F}) . Como no todas las medidas hacen independientes a las aristas, no nos sirve el acoplamiento que construimos en el capítulo anterior, ahora utilizaremos medidas en $(\Omega \times \Omega, \mathcal{F}_2)$, donde \mathcal{F}_2 es la σ -álgebra generada por todos los productos posibles $C \times C'$ de cilindros $C, C' \in \mathcal{F}$.

Diremos que una medida ν del espacio (Ω, \mathcal{F}) está ϵ -**dominada** por otra medida μ del mismo espacio, se denota $\nu \stackrel{\epsilon}{\leq} \mu$, si existe una medida conjunta $m : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo evento medible en Ω se tiene

- i) $m(A \times \Omega) = \nu(A)$,
- ii) $m(\Omega \times A) = \mu(A)$,
- iii) El conjunto **triangular**, $T = \{(\omega, w) \in \Omega \times \Omega; \omega \leq w\}$ cumple $m(T) \geq 1 - \epsilon$.

Las condiciones i), ii) definen una medida conjunta de ν y μ , es decir, estas medidas pueden recuperarse a partir de m , mientras que iii) marca la proximidad entre ellas.

El conjunto T reúne a los elementos en donde la segunda configuración es mayor que la primera; así, cuando una medida domina a otra, en cierta forma significa que es muy probable que las configuraciones obtenidas con la medida dominante sean mayores a las configuraciones obtenidas con la medida dominada. En particular, los eventos crecientes tienen, con cierto margen de error, mayor probabilidad en el modelo dominante; es decir, para cualquier evento creciente C , si $\nu \stackrel{\epsilon}{\leq} \mu$ entonces se tiene que

$$\nu(C) \leq \mu(C) + \epsilon.$$

Esto se prueba expresando las medidas $\nu(C)$ y $\mu(C)$ con la medida conjunta, de modo que sabemos que

$$m(C \times \Omega) \leq m(\Omega \times C) + \epsilon;$$

pues los eventos elementales (ω, w) en $C \times \Omega$, se pueden separar en dos conjuntos, aquéllos donde la segunda configuración es mayor que la primera y los que no. Así, el primer conjunto está contenido en $\Omega \times C$ ya que si $\omega \leq w$, entonces $w \in C$; mientras que el segundo conjunto está contenido en el complemento del conjunto triangular cuya medida es menor que ϵ .

El siguiente lema da condiciones suficientes para que una medida homogénea \mathbb{P}_p domine a otra medida no necesariamente homogénea.

LEMA 4.6. Si ν es una medida de probabilidad del espacio (Ω, \mathcal{F}) y existe un conjunto medible $D \in \mathcal{F}$ con probabilidad $\nu(D) \geq 1 - \epsilon$, tal que para toda configuración $\omega \in D$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$(6) \quad \nu(E_k^+ | \omega^{(k-1)}) \leq p,$$

donde $\omega^k = \{w \in \Omega; w_i = \omega_i, i \leq k\}$. Entonces $\nu \stackrel{\epsilon}{\leq} \mathbb{P}_p$.

DEMOSTRACIÓN. Si D tiene una probabilidad alta, entonces condicionando casi a cualquier rectángulo ω^k tenemos que la probabilidad de que la siguiente arista

esté abierta es menor que la probabilidad de conexión en \mathbb{P}_p de modo que es natural pensar que ν está ϵ -dominada por \mathbb{P}_p . Construyamos la medida que lo prueba.

Cualquier cilindro C se puede expresar como la unión disjunta de cilindros ω^k con k suficientemente grande, así que cualquier producto $C \times C'$ también se puede expresar como la unión disjunta de eventos de la forma $\omega^k \times w^k$. Primero hacemos

$$\begin{aligned} m(E_1^+ \times E_1^+) &= \nu(E_1^+), & m(E_1^+ \times E_1^-) &= 0, \\ m(E_1^- \times E_1^+) &= p - \nu(E_1^+), & m(E_1^- \times E_1^-) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Luego, para $k \geq 2$ definimos la medida de $E_k^{\sigma_k} \times E_k^{\sigma'_k}$ condicionando primero a los rectángulos $\omega^{k-1} \times w^{k-1}$ que forman una partición del espacio $\Omega \times \Omega$.

Si $\nu(E_k^+ | \omega^{k-1}) \leq p$ entonces

$$\begin{aligned} m(E_i^+ \times E_i^+ | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) &= \nu(E_i^+ | \omega^{k-1}), \\ m(E_i^- \times E_i^+ | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) &= p - \nu(E_i^+ | \omega^{k-1}), \\ m(E_i^- \times E_i^- | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) &= 1 - p, \\ m(E_i^+ \times E_i^- | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) &= 0. \end{aligned}$$

La medida de $E_i^- \times E_i^+$ es positiva por hipótesis y quitamos todo el peso de $E_i^+ \times E_i^-$ que es el conjunto en donde la segunda configuración no es mayor que la primera. Por otro lado, si $\nu(E_k^+ | \omega^{k-1}) \geq p$, entonces sin importar los signos σ_k, σ'_k hacemos

$$m(E_1^{\sigma_k} \times E_1^{\sigma'_k} | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) = \nu(E_1^{\sigma_k} | \omega^{k-1}) \mathbb{P}_p(E_k^{\sigma'_k});$$

que es como si las dos medidas fueran independientes.

Con esto hemos definido la medida m sobre los conjuntos $\omega^k \times w^k$ de manera recursiva, ya que para $k \geq 2$ y σ_k y σ'_k positivo o negativo según ω_k y w_k sean 1 ó 0, tenemos que

$$m(\omega^k \times w^k) = m(E_k^{\sigma_k} \times E_k^{\sigma'_k} | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) m(\omega^{k-1} \times w^{k-1});$$

para $k = 1$, los posibles casos son los 4 que definimos al principio.

Ahora que sabemos cuál es la medida en el π -sistema del producto de rectángulos $\omega^k \times w^k$, $k \in \mathbb{N}$, se extiende la medida a su álgebra, que consta de uniones finitas de estos productos y luego se extiende a \mathcal{F}_2 con el método de Carathéodory.

Para ver que es una medida conjunta de ν , revisaremos sólo los rectángulos ω^k con $\omega \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, estos rectángulos forman un π -sistema que genera a \mathcal{F} así que si

$$m(\omega^k \times \Omega) = \nu(\omega^k)$$

para todos los rectángulos ω^k , por el Teorema de unicidad 2.5, la igualdad también se cumple para todos los eventos medibles de \mathcal{F} .

Usaremos inducción; para $k = 1$ la igualdad se obtiene sumando por pares las primeras 4 ecuaciones que definen a m ; luego para $k \geq 2$ descomponemos el espacio en rectángulos ω^{k-1} para utilizar la fórmula de la probabilidad total,

$$m(\omega^k \times \Omega) = \sum_{w^{k-1}} (m(E_k^{\sigma_k} \times E_k^+) + m(E_k^{\sigma_k} \times E_k^-));$$

luego, condicionando con $\omega^{k-1} \times w^{k-1}$, obtenemos la medida de $\nu(\omega^k)$ sin importar cuál definición correspondía, hay que considerar por separado cuando σ_k es positivo y negativo, pero ninguno de los dos casos dependen de los rectángulos w^{k-1} y usando la hipótesis de inducción tenemos,

$$m(\omega^k \times \Omega) = \nu(E_k^{\sigma_k} | \omega^{k-1}) \nu(\omega^{k-1}) = \nu(\omega^k).$$

Análogamente se muestra que es una medida conjunta de \mathbb{P}_p , aquí será necesario utilizar además que para \mathbb{P}_p las aristas son independientes, de modo que

$$m(\Omega \times w^k) = \mathbb{P}_p(E_k^{\sigma_k}) \mathbb{P}_p(w^{k-1}) = \mathbb{P}_p(w^k).$$

Finalmente, para ver que el conjunto triangular tiene medida mayor a $1 - \epsilon$, vamos a calcular $\nu(D)$ con ayuda de la medida conjunta.

Estudiamos primero el subconjunto de $D \times \Omega$ en donde los elementos (ω, w) cumplen $\omega \not\leq w$; para esto es necesario que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\omega, w) \in E_k^+ \times E_k^-$; pero la medida se construyó para que si $\omega \in D$ entonces estos conjuntos no tuvieran medida positiva, es decir para cualquier $k \geq 1$

$$m((E_k^+ \cap D) \times E_k^-) = \sum_{\substack{\omega \in D \\ w^{k-1}}} m(E_k^+ \times E_k^- | \omega^{k-1} \times w^{k-1}) m(\omega^{k-1} \times w^{k-1}) = 0.$$

Así, los únicos elementos que contarán en la medida de $D \times \Omega$ son aquéllos que pertenecen al conjunto triangular y así tenemos que

$$1 - \epsilon \leq \nu(D) \leq m\{(\omega, w) \in \Omega \times \Omega; \omega \leq w\}.$$

Mostrando que ν está ϵ -dominada por \mathbb{P}_p . □

Dado un evento creciente A , y una medida de probabilidad \mathbb{P}_p podemos aumentar la probabilidad del evento condicionando con otro evento creciente B para tener una medida de probabilidad $\mathbb{P}_{p,B} := \mathbb{P}_p(\cdot | B)$, o utilizando un nuevo parámetro de conexión $p + \epsilon$. En la proposición de la primera ventana damos condiciones bajo las cuales $\mathbb{P}_{p,B} \stackrel{\epsilon}{\leq} \mathbb{P}_{p+\epsilon}$ y si hacemos $B = A$, entonces obtenemos una ventana de umbral.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA PRIMERA VENTANA. Nuestra intención es utilizar el lema de arriba para probar que $\mathbb{P}_{p,A} \stackrel{\epsilon}{\leq} \mathbb{P}_{p+\epsilon}$, de modo que al utilizar la desigualdad entre las dos medidas del mismo evento creciente A tendremos

$$1 = \mathbb{P}_{p,A}(A) \leq \mathbb{P}_{p+\epsilon}(A) + \epsilon.$$

Primero veamos qué configuraciones cumplen con la condición (6) del lema 4.6 y luego qué necesitamos pedir para que éstas sean casi todas las configuraciones. Queremos acotar con $p + \epsilon$ a

$$\mathbb{P}_{p,A}(E_k^+ | \omega^{(k-1)}) = \frac{\mathbb{P}_p(E_k^+ \cap (A \setminus \delta_k^I A) \cap \omega^{(k-1)}) + \mathbb{P}_p(E_k^+ \cap \delta_k^I A \cap \omega^{(k-1)})}{\mathbb{P}_p(A \cap \omega^{(k-1)})}.$$

Aquí separamos al evento A en la parte que no depende de la k -ésima arista $A \setminus \delta_k^I A$ y en el resto, $\delta_k^I A$, que además está contenido en E_k^+ porque se trata de un evento creciente. Utilizando la independencia de E_k^+ y la monotonía de la medida con $A \setminus \delta_k^I A \subset A$ podemos ver que

$$\frac{\mathbb{P}_p(E_k^+ \cap (A \setminus \delta_k^I A) \cap \omega^{(k-1)})}{\mathbb{P}_p(A \cap \omega^{(k-1)})} \leq p,$$

así, el segundo sumando es el que debe acotarse con ϵ , entonces nos interesan las configuraciones tales que para toda $k \geq 1$ cumplen

$$(7) \quad \frac{\mathbb{P}_p(\delta_k^I A \cap \omega^{(k-1)})}{\mathbb{P}_p(A \cap \omega^{(k-1)})} \leq \epsilon.$$

Para cada k fijo, las configuraciones se pueden agrupar en los rectángulos ω^{k-1} que cumplen o no la condición de arriba, si reunimos en D_k a los rectángulos que cumplen (7) para cada $k \geq 1$ fijo, entonces su intersección D es el conjunto que requiere el lema 4.6.

Para conocer la probabilidad del conjunto D examinaremos la probabilidad de su complemento, expresando a éste como una unión disjunta de eventos,

$$B_k := \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} D_i \right) \cap D_k^c.$$

Es claro que $\{B_k\}_{k \geq 1}$ son eventos disjuntos y su unión es D^c y además como B_k esta formado por los rectángulos que no cumplen (7) para k , entonces tendremos que

$$\mathbb{P}_p(A \cap B_k) \leq \frac{\mathbb{P}_p(\delta_k^I A \cap B_k)}{\epsilon}.$$

Luego, $\delta_k^I A \subset \delta^I A$ de modo que al sumar sobre $k \geq 1$, podemos usar la σ -aditividad de la medida para ver que

$$\mathbb{P}_p(A \cap D^c) \leq \frac{\mathbb{P}_p(\delta^I A)}{\epsilon};$$

recordemos que la medida que queremos dominar es $\mathbb{P}_{p,A}$ y gracias a las hipótesis $\mathbb{P}_p(A) \geq \epsilon$ y $\mathbb{P}_p(\delta^I A) \leq \epsilon^3$, tenemos

$$\mathbb{P}_{p,A}(D^c) \leq \frac{\mathbb{P}_p(\delta^I A)}{\epsilon \mathbb{P}_p(A)} \leq \epsilon$$

que nos permite aplicar el lema 4.6 como necesitamos. \square

Un resultado similar es el de Friedgut y Kalai, donde se restringen a eventos crecientes y simétricos; un evento $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, Λ finito, es simétrico si existe un grupo de permutaciones de Λ tal que para cualquier permutación π del grupo, si $\omega \in A$ entonces $\pi(\omega) \in A$, donde la permutación se aplica a los elemento de $i \in \Lambda$.

TEOREMA 4.7 (Friedgut, Kalai). *Existe una constante c , tal que para todo evento $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ creciente y simétrico, con $|\Lambda| = n$ finito; si $\mathbb{P}_{p_0}(A) > \epsilon$, con $0 < \epsilon \leq 1/2$, entonces*

$$\mathbb{P}_p(A) \geq 1 - \epsilon \quad \forall p \geq p_0 + c \frac{\log(2\epsilon)}{\log n}.$$

Para una prueba ver [EF96]. Sin embargo, con estas ventanas no se puede decir algo del comportamiento de la probabilidad del evento con parámetro menor a p_0 . Para mejorar nuestro conocimiento de la ventana necesitamos una forma de poder acotar nosotros mismos a la frontera interior del evento.

3. Cotas para la Medida de la Frontera

En esta sección probaremos dos formas de relacionar la probabilidad de un evento y el número esperado de aristas esenciales que nos permitirá acotar la medida de la frontera del evento con la medida de sus influencias. A partir de aquí uno se ve restringido a utilizar eventos finitamente generados.

El primero de los lemas establece que el número esperado de aristas esenciales será grande si el evento, con un parámetro de conexión alejado de cero y uno, tiene probabilidad pequeña.

LEMA 4.8. *Para todo evento finitamente generado $A \in \mathcal{F}_0$ no vacío, tenemos*

$$\mathbb{E}_p(\eta_A | A) \geq \log_{p'} \mathbb{P}_p(A),$$

con $p' = \min\{p, 1 - p\}$.

DEMOSTRACIÓN. La esperanza de η_A es la suma de todas las influencias y condicionando con A , tenemos entonces la suma de las probabilidades de $\delta_i^I A$ dividido por la medida del evento A ,

$$\mathbb{E}_p(\eta_A|A) = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbb{P}_p(\delta_i^I A)}{\mathbb{P}_p(A)}.$$

Cuando se trata de un rectángulo ω^k , para todas las configuraciones es esencial que cada arista $i \leq k$ sea exactamente igual a ω_i porque de otro modo, no pertenecerían al rectángulo ω^k ; entonces $\delta_i^I \omega^k = \omega^k$ para toda $i \leq k$ y si $i > k$ entonces la frontera es vacía; teniendo así

$$\mathbb{E}_p(\eta_{\omega^k}|\omega^k) = \frac{\sum_{i \leq k} \mathbb{P}_p(\omega^k)}{\mathbb{P}_p(\omega^k)} = k,$$

por otro lado la medida del rectángulo se puede acotar con el mínimo de p y $1 - p$

$$\mathbb{P}_p(\omega^k) = \prod_{\omega_i=1} p \prod_{\omega_i=0} (1-p) \leq (p')^k,$$

y al obtener logaritmo base p' tenemos una igualdad entre la esperanza condicionada y el logaritmo base p' de la medida.

Para cualquier otro tipo de evento $A \in \mathcal{F}_k$ se probará por inducción sobre el número de aristas k que generan al evento. Ya vimos cómo descomponer al evento A en dos conjuntos A_k^+ y A_k^- de donde podamos recuperar la información del primero pero que dependan de una arista menos; ahora veremos cómo se relacionan sus influencias internas.

Los eventos de \mathcal{F}_1 cumplen la desigualdad del lema pues tanto E_1^+ como E_1^- son rectángulos y el total hace trivial la desigualdad. Ahora bien, si $k > 1$, entonces A se puede descomponer como en el lema de Harris,

$$A = (E_k^+ \cap A_k^+) \cup (E_k^- \cap A_k^-).$$

Análogamente podemos definir los eventos A_i^+ ó A_i^- para cualquier $i < k$. Una de estas pareja cumple que ninguno de los dos eventos es vacío; por ejemplo, si $A_k^+ = \emptyset$ entonces A está totalmente contenido en E_k^- ; si para toda $i \leq k$ el evento A está contenido totalmente en algún rectángulo $E_i^{\sigma_i}$, entonces A se puede expresar como la intersección de estos eventos, siendo así un rectángulo. Entonces debe existir un elemento $i \leq k$ para el que las probabilidades de los eventos A_i^+ y A_i^- no son ni cero ni uno, sin pérdida de generalidad podemos suponer que esto se cumple para la arista k .

El evento A_k^+ conservará la información de las configuraciones que tienen la arista k abierta y A_k^- hará lo mismo para las que tienen la arista cerrada. Como ya vimos en

la demostración del lema de Harris, estos eventos dependen sólo de las primeras $k - 1$ aristas y por lo tanto serán independientes de E_k^+ y E_k^- .

Notemos que si $\omega \in A$ pertenece a la k -frontera de A entonces la pareja ω y $S_k\omega$ pertenece sólo a uno de los eventos A_k^+ y A_k^- ; ya que si pertenecen a ambos eventos, entonces $\omega \notin \delta_k^I A$. Así, la k -frontera interior es

$$\delta_k^I A = (E_k^+ \cap (A_k^+ \setminus A_k^-)) \cup (E_k^- \cap (A_k^- \setminus A_k^+)).$$

Para las i -fronteras restantes, dada una configuración $\omega \in A$ puede suceder que su i -par, $S_i\omega$, pertenezca a A ; y dado que estas configuraciones coinciden en la arista k , deben pertenecer al mismo evento A_k^+ ó A_k^- de modo que no son parte de sus i -fronteras. En cambio si $\omega \in A$ pertenece a la i -frontera de A entonces también pertenece a $\delta_i^I A_k^+$ ó $\delta_i^I A_k^-$, según sea el caso. Entonces

$$\delta_i^I A = (E_k^+ \cap \delta_i^I A_k^+) \cup (E_k^- \cap \delta_i^I A_k^-).$$

Calculando la medida de las fronteras como la suma de la medida de los eventos que la componen tenemos, para $i < k$,

$$\mathbb{P}_p(\delta_k^I A) = p\mathbb{P}_p(A_k^+ \setminus A_k^-) + (1 - p)\mathbb{P}_p(A_k^- \setminus A_k^+),$$

$$\mathbb{P}_p(\delta_i^I A) = p\mathbb{P}_p(\delta_i^I A_k^+) + (1 - p)\mathbb{P}_p(\delta_i^I A_k^-).$$

Ahora bien, calculando $\mathbb{P}_p(A)\mathbb{E}_p(\eta_A | A)$ como la suma de las probabilidades de las fronteras interiores, tenemos que es igual a

$$p\mathbb{P}_p(A_k^+ \setminus A_k^-) + (1 - p)\mathbb{P}_p(A_k^- \setminus A_k^+) + \sum_{i < k} p\mathbb{P}_p(\delta_i^I A_k^+) + (1 - p)\mathbb{P}_p(\delta_i^I A_k^-);$$

tomando $\alpha = \mathbb{P}_p(A_k^+)$ y $\beta = \mathbb{P}_p(A_k^-)$, podemos acotar los dos primeros sumandos por el valor absoluto de $\alpha - \beta$ y el mínimo p' , porque la probabilidad de una diferencia es menor que la diferencia de las probabilidades; del último sumando se recuperan las esperanzas condicionadas de A_k^+ y A_k^- multiplicadas por factores adecuados; y expresando la medida de A en términos de α y β obtenemos que

$$\mathbb{E}_p(\eta_A | A) \geq \frac{p'|\alpha - \beta| + p\alpha\mathbb{E}_p(\eta_{A_k^+} | A_k^+) + (1 - p)\beta\mathbb{E}_p(\eta_{A_k^-} | A_k^-)}{(p\alpha + (1 - p)\beta)}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a los eventos A_k^+ y A_k^- , que están generados por menos aristas que A , podemos sustituir la esperanza por un logaritmo. De modo que basta probar la siguiente desigualdad

$$\frac{p'|\alpha - \beta| + p\alpha \log_{p'} \alpha + (1 - p)\beta \log_{p'} \beta}{p\alpha + (1 - p)\beta} \geq \log_{p'}(p\alpha + (1 - p)\beta).$$

Para ver que esta desigualdad es válida para cualquier $\alpha, \beta \in (0, 1)$, notemos primero que el papel de α y β es totalmente simétrico, supongamos que $\beta \leq \alpha$ hay que ver esta desigualdad (despejada) como una función de β es siempre positiva. Esto se logra mostrando que la función es cóncava porque su segunda derivada es negativa y así, alcanza su mínimo en la frontera, es decir, en uno de los extremos del intervalo que estamos considerando. La función será

$$f_\alpha(\beta) = p'(\alpha - \beta) + p\alpha \log_{p'} \alpha + (1 - p)\beta \log_{p'} \beta \\ - (p\alpha + (1 - p)\beta) \log_{p'}(p\alpha + (1 - p)\beta),$$

y su segunda derivada es negativa

$$\frac{d^2 f_\alpha(\beta)}{d\beta^2} = \frac{1 - p}{\beta \log p'} - \frac{(1 - p)^2}{(p\alpha + (1 - p)\beta) \log p'}.$$

Al evaluar la función f_α en α es cero y en cero es positiva,

$$f_\alpha(0) = p\alpha \left(\frac{p'}{p} - \log_{p'} p \right) \geq 0;$$

así, la función debe ser positiva en todo el intervalo $(0, \alpha)$ como queríamos para terminar el paso inductivo. \square

Sin embargo el converso de este lema es falso; es decir, no es suficiente saber que el número esperado de aristas esenciales es grande para que la probabilidad del evento sea pequeña. Llamaremos **banda** a un evento de la forma $S = A \setminus B$ con A y B eventos crecientes. El segundo lema muestra que si aseguramos, para una banda S , que el número esperado de aristas esenciales condicionado a S es suficientemente grande en todo un intervalo, entonces la integral de la probabilidad de S sobre ese intervalo es pequeña.

LEMA 4.9. *Dados $0 < \alpha < \beta < 1$ y una banda $S \in \mathcal{S}$, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta \mathbb{P}_p(S) dp \leq \frac{2}{\inf_{p \in [\alpha, \beta]} \mathbb{E}_p(\eta_S | S)}.$$

DEMOSTRACIÓN. En la demostración anterior se acotó la esperanza al manipular la expresión $\mathbb{P}_p(A) \mathbb{E}_p(\eta_A | A)$, ahora partiremos de la misma expresión pero buscando una forma distinta de expresar η_S . Notemos que si $\omega \in S$ entonces

$$C_A(\omega) \cup C_B(\omega) = C_S(\omega)$$

porque si ω está en la i -frontera interior de S es porque su par $S_i \omega$ pertenece a B o ya no pertenece a A , en ambos casos la configuración forma parte de la frontera de

A ó B . Y por otro lado, las aristas que son esenciales para que una configuración ω , que ya pertenece a la banda S , pertenezca a A y no pertenezca a B son también las aristas esenciales de ω para pertenecer a S . Así, con $\omega \in S$ tenemos

$$\begin{aligned}\eta_S &= |C_A \cup C_B| \leq \eta_A + \eta_B, \\ \eta_S \cdot \chi_S &\leq \eta_A + \eta_B.\end{aligned}$$

Como la esperanza es monótona y lineal tenemos que

$$\mathbb{P}_p(S)\mathbb{E}_p(\eta_S | S) = \mathbb{E}_p(\eta_S \cdot \chi_S) \leq \mathbb{E}_p(\eta_A) + \mathbb{E}_p(\eta_B),$$

si cambiamos la esperanza condicionada de η_S por su ínfimo en (α, β) , la desigualdad sigue siendo válida para toda p en ese intervalo y así será una constante al integrar sobre (α, β) además, por el lema de Margulis-Russo, la integral de la esperanza de η_A y η_B es igual a la diferencia de las medidas de A y B en α y β , así tenemos que

$$\inf_{p \in (\alpha, \beta)} \mathbb{E}_p(\eta_S | S) \int_{\alpha}^{\beta} \mathbb{P}_p(S) \leq 2,$$

obteniendo una cota para el promedio de la medida de S en el intervalo (α, β) . \square

Ahora hay que descomponer la frontera en eventos del tipo banda. Notemos que una banda $S = A \setminus B$ tiene la característica que para cualesquiera tres configuraciones $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$, si la primera pertenece a S entonces las tres configuraciones pertenecen a A , pero si $\omega_2 \notin S$ se debe a que pertenece a B y por lo tanto ω_3 también queda excluido de S .

OBSERVACIÓN. Este comportamiento se puede observar en los conjuntos esenciales con cardinalidad k fija de un evento creciente.

Consideremos un evento creciente A y dos configuraciones $\omega \leq w$, ambas en A , y comparemos sus conjuntos esenciales. Si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que w esté en la i -frontera de A , como $S_i w$ coincide con w excepto por la i -ésima arista tenemos que $S_i w$ debe ser mayor que alguno de la pareja ω y $S_i \omega$; más aún debe suceder que $S_i \omega \leq S_i w$ con $S_i \omega \notin A$ porque de otro modo $S_i w \in A$, contrario a nuestra suposición. Así tenemos que la arista i también es esencial para ω ,

$$C_A(w) \subset C_A(\omega).$$

Analogamente, considerando ahora dos configuraciones $\omega \leq w$ fuera de A tenemos la contención contraria, para cualquier arista i esencial para ω tenemos que $S_i \omega \in A$ coincide con ω excepto por la arista i , de modo que es menor que uno de la pareja w ,

$S_i w$ y más exactamente, $S_i \omega \leq S_i w$ pues de otro modo $w \in A$, que no es el caso. Así, w también pertenece a la i -frontera de A y entonces

$$C_A(\omega) \subset C_A(w).$$

Hemos mostramos que η_A es una función no-creciente dentro de A y no-decreciente fuera de A , y tanto los conjuntos de configuraciones dentro de A que tienen a lo más k aristas esenciales ($\eta_A \leq k$), como los de configuraciones fuera de A que tienen k o más aristas esenciales ($\eta_A \geq k$) forman eventos crecientes. Con esto podemos descomponer la frontera δA en bandas de la siguiente forma: para cada $k \geq 1$ definimos

$$\begin{aligned} \Delta_k^I A &:= \{\omega \in A; \eta_A(\omega) = k\}, \\ \Delta_k^E A &:= \{\omega \in \Omega \setminus A; \eta_A(\omega) = k\}; \end{aligned}$$

Estos eventos son bandas porque resultan de la diferencia de dos conjuntos crecientes como los de arriba: $\Delta_k^I A$ contiene las configuraciones en A que cumplen $\eta_A(\omega) \leq k$ pero $\eta_A(\omega) \not\leq k-1$; mientras que el evento $\Delta_k^E A$ contiene a las configuraciones que no pertenecen a A y cumplen $\eta_A(\omega) \geq k$ pero $\eta_A(\omega) \not\geq k+1$.

Si se trata de un evento finitamente generado entonces el conjunto esencial está limitado dentro del conjunto de aristas que generan al evento, de modo que cualquier evento $\omega \in \delta A$ pertenece a

$$\Delta_k A := \Delta_k^I A \cup \Delta_k^E A,$$

para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Ahora estamos listos para demostrar que se puede acotar la probabilidad de la frontera total si sabemos que todas las influencias son muy pequeñas.

PROPOSICIÓN 4.10 (Cota de la frontera). *Si $A \in \mathcal{F}_0$ es un evento creciente, entonces para cualquier $\epsilon \in (0, 1/2)$ se tiene*

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \mathbb{P}_p(\delta A) dp \leq 4(\log_{\epsilon} \eta)^{-1/2},$$

donde $\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{p \in [0,1]} \mathbb{P}_p(\delta_i A) \leq \eta$.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos acotando la medida de $\Delta_k^I A$ (ó $\Delta_k^E A$) con ayuda del lema 4.9 para bandas, tomando $S = \Delta_k^I A$ (ó $S = \Delta_k^E A$) tenemos

$$\int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(S) dp \leq \frac{2}{\inf_{p \in [\alpha, 1-\alpha]} \mathbb{E}_p(\eta_S | S)}.$$

Usamos la fórmula de Bayes para descomponer la esperanza y poder relacionarla con las i -influencias que tenemos acotadas:

$$\mathbb{E}_p(\eta_S|S) = \frac{\sum_{C,k} \mathbb{E}_p(\eta_S|S_{C,k}) \mathbb{P}_p(S_{C,k})}{\sum_{C,k} \mathbb{P}_p(S_{C,k})},$$

donde C, k corre sobre todos los conjuntos esenciales que tienen cardinalidad $k \in \mathbb{N}$, y $S_{C,k} \subset S$ contiene a las configuraciones en A (ó $\Omega \setminus A$) que tienen exactamente a C, k como conjunto esencial. Luego, si el conjunto esencial de una configuración ω dada es C, k entonces cualquier i -par $S_i\omega$ en A (ó $\Omega \setminus A$) tiene k aristas esenciales si y sólo si su conjunto esencial también es C, k , esto es por la monotonía de η_S en A (ó $\Omega \setminus A$).

Así, la esperanza de S y $S_{C,k}$ es la misma si condicionamos con $S_{C,k}$ y podemos usar el lema 4.8 para acotar con el logaritmo de $\mathbb{P}_p(S_{C,k})$, pero además $S_{C,k} \subset \delta_i A$ para cualquier $i \in C, k$ de modo que podemos mejorar la cota utilizando logaritmo de η ,

$$\mathbb{E}_p(\eta_S|S_{C,k}) \geq \log_{p'} \mathbb{P}_p(S_{C,k}) \geq \log_{p'} \eta;$$

más aún, para $p \in (\alpha, 1 - \alpha)$ la base del logaritmo se puede reducir a α , así tenemos

$$\mathbb{E}_p(\eta_S|S) \geq \frac{\sum_{C,k} \log_\alpha \eta}{\mathbb{P}_p(S_{C,k})} \sum_{C,k} \mathbb{P}_p(S_{C,k}),$$

para toda $p \in (\alpha, 1 - \alpha)$, dejando una buena cota del ínfimo de la esperanza condicionada de η_S ,

$$\int_\alpha^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(S) dp \leq \frac{2}{\log_\alpha \eta}.$$

Sumando las dos desigualdades con $S = \Delta_k^I A$ y $S = \Delta_k^E A$ obtenemos una cota para la integral de $\Delta_k A$

$$M = \frac{4}{\log_\alpha \eta};$$

ésta será de utilidad porque tanto la esperanza de η_A como la medida de la frontera total, δA , se pueden expresar en términos de estos conjuntos:

$$(8) \quad \int_\alpha^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\delta A) dp = \sum_{k \geq 1} \int_\alpha^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp,$$

$$(9) \quad \int_\alpha^{1-\alpha} \mathbb{E}_p(\eta_A) dp = \sum_{k \geq 1} \int_\alpha^{1-\alpha} k \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp \leq 1;$$

utilizar el lema de Margulis-Russo en la segunda ecuación por tratarse de un evento finitamente generado.

Aunque la cota para la integral de $\Delta_k A$ es la clave para acotar la integral de la medida de la frontera, no es suficiente aplicarla directamente en (8) porque se trata

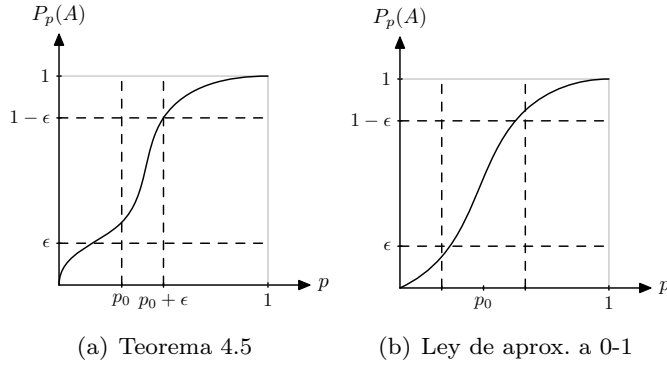


FIGURA 1. El Teorema 4.5 para obtener una ventana de umbral y la ley de aproximación a 0-1 de Russo.

de una serie y la cota es uniforme, así que nos valdremos de la desigualdad (9) para deshacernos de la cola de la serie

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp.$$

Para acotar la cola de la serie, podemos multiplicar al k -ésimo sumando por $\frac{k}{k_0+1} \geq 1$, entonces estamos acotando con una parte de la integral en (9) y así,

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k_0+1} \int_{\alpha}^{1-\alpha} k \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp \leq \frac{1}{k_0+1}.$$

Ahora, los primeros k_0 términos se pueden acotar con $k_0 M$; usamos el único número natural que cumple $k_0 \leq M^{-1/2} \leq k_0 + 1$, así la integral de la medida de la frontera sobre $(\alpha, 1 - \alpha)$ es igual a

$$\sum_{k=1}^{k_0} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\Delta_k A) dp \leq k_0 M + \frac{1}{k_0+1} \leq 2M^{1/2};$$

como $2M^{1/2} = 4(\log_{\alpha} \eta)^{-1/2}$, obtenemos el resultado deseado. \square

4. El Teorema sobre Umbrales de Russo

En cierta forma, la ley de Russo para eventos crecientes es sólo una aplicación eficiente de la primera aproximación de ventana, Teorema 4.5 y el lema 4.10, que permite acotar la medida de las frontera por medio de las influencias del evento.

TEOREMA 4.11 (Ley de aproximaición a 0-1). *Si $A \in \mathcal{F}_0$ es un evento creciente, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tal que si $\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{p \in [0,1]} \mathbb{P}_p(\delta_i A) \leq \eta$ entonces existe un punto*

$p_0 \in [0, 1]$ tal que

$$(10) \quad \mathbb{P}_p(A) \leq \epsilon \quad \forall p \leq p_0 - \epsilon,$$

$$(11) \quad \mathbb{P}_p(A) \geq 1 - \epsilon \quad \forall p \geq p_0 + \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea A un evento creciente finitamente generado y $\epsilon > 0$. Ya sabemos que si p_0 cumple las condiciones de 4.5, entonces podemos encontrar una ventana de umbral que nos habla de la medida del evento para parámetros mayores a $p_0 + \epsilon$, pero no sabemos que pasa ante de p_0 . Consideremos

$$q := \sup\{p \in [0, 1]; \mathbb{P}_p(A) \leq \epsilon\},$$

y descartemos primero dos casos. Si $q \geq 1 - \epsilon$ entonces con $p_0 = q$ se cumple (10) y ya que la ventana no deja ningún punto que sea mayor a $p_0 + \epsilon$, se cumple (11) por vacuidad. Por otro lado si $\epsilon \geq 1/2$, estaríamos buscando una ventana de ancho mayor o igual a 1, que no tiene sentido.

Supongamos entonces que $\epsilon < 1/2$ y $q < 1 - \epsilon$. Lo que interesa ahora es encontrar un punto p_0 mayor a q y lo más cercano a él, que además cumpla la segunda condición del Teorema 4.5 con la que obtendremos una primera ventana de umbral. Buscaremos a p_0 en un intervalo $(\beta_1, \beta_2) \subset (\alpha, 1 - \alpha)$. Por la Proposición 4.10 tenemos que

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \mathbb{P}_p(\delta A) dp \leq \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{P}_p(\delta A) dp \leq 4[\log_{\alpha} \eta]^{-1/2},$$

entonces con los parámetros adecuados, tendremos que existe un punto p_0 del intervalo (β_1, β_2) tal que la medida de su frontera cumpla

$$\mathbb{P}_{p_0}(\delta A) \leq \frac{4[\log_{\alpha} \eta]^{-1/2}}{\beta_2 - \beta_1} \leq \epsilon^3,$$

pues de otro modo tendríamos que la integral de la frontera sobre el intervalo es estrictamente mayor a $\epsilon^3(\beta_2 - \beta_1)$, que es una contradicción. Los parámetros deben cumplir $\beta_1 \geq q$ y $\beta_2 \leq q + \epsilon$, para que $\mathbb{P}_{p_0}(A) \geq \epsilon$ y $\mathbb{P}_{p_0-\epsilon}(A) \leq \epsilon$, respectivamente. Si tomamos

$$\alpha = \frac{\epsilon}{2} = \beta_2 - \beta_1,$$

$$\beta_1 = \max\{q, \frac{\epsilon}{2}\},$$

entonces se cumplen las condiciones necesarias y el intervalo (β_1, β_2) está contenido en $(\alpha, 1 - \alpha)$ como queríamos, esto se verifica con operaciones elementales y recordando que $q \leq 1 - \epsilon$ y $\epsilon < 1/2$.

Finalmente, para poder acotar la integral sobre el intervalo del que obtendremos p_0 , necesitamos que las influencias del evento creciente A sean menores que $\eta(\epsilon)$,

definiendo η como aquél que cumple

$$\frac{4[\log_{\epsilon/2} \eta]^{-1/2}}{\epsilon/2} = \epsilon^3.$$

□

Existen otros resultados similares que relacionan las influencias de un evento con su probabilidad, como el Teorema de Talagrand, ver [Tal94], que también permite obtener ventanas de umbral para eventos crecientes finitamente generados.

TEOREMA 4.12 (Talagrand). *Para un evento creciente $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, $|\Lambda| = n$; existe $K = K(n)$ tal que si $p, p + \epsilon \in [0, 1]$ entonces*

$$\mathbb{P}_p(A)(1 - \mathbb{P}_{p+\epsilon}(A)) \leq \eta^{\epsilon/K},$$

donde $\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{p \in [0,1]} \mathbb{P}_p(\delta_i A) \leq \eta$.

COROLARIO 4.13. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ es un evento creciente y

$$\mathbb{P}_p(\delta_i A) < \eta \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall p \in [0, 1],$$

entonces existe un punto $q \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A) &\leq \epsilon & \forall p \leq q, \\ \mathbb{P}_p(A) &\geq 1 - \epsilon & \forall p \geq q + \epsilon. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomando de nuevo $q := \sup\{p \in [0, 1]; \mathbb{P}_p(A) \leq \epsilon\}$, la primera desigualdad se cumple por construcción. Ahora tomamos $\eta = \eta(K, \epsilon)$ que cumpla

$$\eta^{\epsilon/K} = \epsilon^2;$$

así, con el teorema anterior, podemos despejar la probabilidad del evento con parámetro $q + \epsilon$ y por monotonía, la segunda desigualdad del corolario; así,

$$1 - \mathbb{P}_{q+\epsilon}(A) \leq \frac{\eta^{\epsilon/K}}{\mathbb{P}_p(A)} \leq \epsilon.$$

□

El Teorema de Talagrand se obtiene con herramientas más complicadas que las que usamos aquí y tiene la desventaja de que la constante K depende del número de aristas que generan al evento creciente, así que es menos general que la ley de Russo, sin embargo es bueno tener en cuenta todo el trabajo que se ha hecho alrededor de las ventanas de umbral porque son la clave para entender el comportamiento de las propiedades que estudiamos en los modelos de percolación.

El Teorema de Harris y Kesten

Para cualquier retícula \mathbb{L}_d , nos interesa cuando un vértice en particular posee una componente conexa infinita de aristas abiertas, a esto se le llama **percolación**; su probabilidad depende sólo de la dimensión de la retícula pues ésta es invariante bajo traslaciones si el parámetro de conexión es uniforme. Además, existe un punto crítico donde la probabilidad de percolación comienza a ser positiva; de manera general encontraremos cotas para este punto crítico y en particular, demostraremos que para la retícula \mathbb{L}_2 el punto crítico es $1/2$.

1. El Umbral de la Probabilidad Percolación de Aristas en Retículas

En este capítulo es muy importante notar que la probabilidad de los eventos que dependen de una región de la retícula es la misma sin importar dónde situemos esta región respecto al origen. Es por esto que para estudiar la percolación se considera siempre la componente C_0 del origen; la probabilidad de percolación en \mathbb{L}_d se denota $\theta_p(d)$ y también nos interesa el valor $\varphi_p(d)$, que representa la probabilidad de que exista al menos una componente conexa infinita de aristas abiertas en \mathbb{L}_d , a la que llamaremos simplemente c.c. infinita.

Primero compararemos la probabilidad de percolación con la probabilidad de tener una componente conexa infinita de aristas abiertas; estos dos son eventos diferentes y su semejanza ha inspirado las técnicas que se utilizan en la Percolación. Estos eventos tiene características similares y sin embargo son muy diferentes. Ambos son eventos crecientes pues si hay percolación (o existe una c.c. infinita) en una configuración ω , entonces en cualquier configuración con más aristas abiertas $\omega \leq w$, también hay percolación (o existe una c.c. infinita) porque las aristas de las c.c. infinitas también están abiertas en w .

Pero para que ocurra percolación es necesario que al menos una de las 4 aristas que inciden en el origen esté abierta y para que exista una c.c. infinita podemos prescindir de cualquier cantidad finita de aristas. Es decir, el evento de tener una c.c. infinita es un evento infinito.

LEMA 5.1. *Tener una c.c. infinita en la retícula \mathbb{L}_d es un evento infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Esto se puede ver porque dada cualquier configuración con una c.c. infinita y cualquier conjunto finito S de aristas, podemos reasignar el estado de las aristas en S como queramos y seguiremos teniendo una c. c. infinita; lo que podría pasar es que las aristas de S formen parte de la componente infinita, en cuyo caso, de estar cerradas, puede ser que desconectamos a la c. conexa en varias componentes, pero al menos una de ellas sigue siendo infinita.

Más formalmente, podemos utilizar el lema 4.3 que caracteriza los eventos infinitos como aquéllos cuyas e -fronteras son vacías. Porque para cada arista $e = ab$, si una configuración ω no tiene una c.c. infinita entonces, las componentes C_a y C_b son finitas y aunque la arista e esté abierta, logramos a lo más conectar estas dos componentes, que siguen siendo finitas. Así, ni ω ni $S_e\omega$ tienen una c.c. infinita.

Por el contrario, si ω tiene una c.c. infinita y la arista e pertenece a esta componente, debe suceder que aún en la configuración con e cerrada, alguna de las componentes C_a ó C_b es infinita, pues de lo contrario aún con la arista e abierta, ésta no pertenecería a una c.c. infinita. Entonces, tanto ω como $S_e\omega$ poseen una c.c. infinita.

De modo que las e -fronteras del evento son vacías y por lo tanto tener una c.c. infinita es un evento infinito. \square

Notemos que si hay percolación entonces existe una c.c. infinita, la del origen; por otro lado, que exista una c.c. infinita indica que ocurrió percolación para alguno de los vértices, así

$$\theta_p \leq \varphi_p \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta_p.$$

Utilizando las desigualdades de arriba, la primera si $\theta_p > 0$ y la segunda si $\theta_p = 0$, tenemos que

$$\varphi_p = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_p = 0 \\ 1 & \text{si } \theta_p > 0. \end{cases}$$

Ya que la percolación es un evento creciente, hay un **punto crítico** a partir del cual su probabilidad es no negativa pero no podemos sacar conclusiones en el punto crítico, así

$$\theta_p(d) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c(d) \\ > 0 & \text{si } p > p_c(d), \end{cases}$$

con $p_c(d) = \sup\{p; \theta_p(d) = 0\}$. De modo que el punto crítico $p_c(d)$ divide al proceso en dos fases; la primera, en donde con probabilidad 1 cualquier vértice pertenece a una c.c. finita; y la segunda, en donde la probabilidad de tener una c.c. infinita es 1 y la

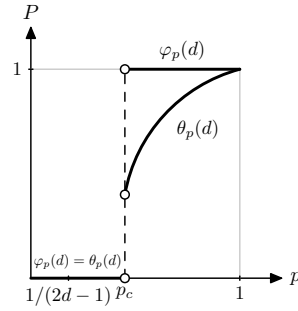


FIGURA 1. Si la probabilidad de percolación es nula, entonces φ_p también es cero y si $\varphi = 1$ entonces la probabilidad de percolación es positiva. No sabemos cómo se comportan las funciones en el punto crítico p_c .

probabilidad de que un vértice en particular pertenezca a una de éstas es, al menos, positiva. Aquí mostraremos que para $d \geq 2$, estas dos fases no son triviales; es decir, $0 < p_c(d) < 1$.

En el siguiente teorema damos cotas para la probabilidad crítica de percolación en la retícula. Pero primero necesitamos un pequeño lema que habla de la monotonicidad del evento respecto a la dimensión de las retículas.

LEMA 5.2. *La probabilidad de percolación es creciente respecto a la dimensión de la retícula \mathbb{L}_d . Es decir, si $d \leq d'$ entonces*

$$\theta_p(d) \leq \theta_p(d').$$

DEMOSTRACIÓN. Si $d \leq d'$, se puede considerar a \mathbb{L}_d como una subgráfica de $\mathbb{L}_{d'}$; basta agregar $d' - d$ entradas con valor 0 a cada vértice. Así, el modelo de percolación de \mathbb{L}_d puede estudiarse a través del modelo de $\mathbb{L}_{d'}$ pues los eventos en la subgráfica no dependen de las aristas restantes $\mathbb{E}^{d'} \setminus \mathbb{E}^d$, y para $k \in \mathbb{E}^d$ se tiene

$$\mathbb{P}_p^d(\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} : w_k = 1) = \mathbb{P}_p^{d'}(\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^{d'}} : w_k = 1);$$

de manera que la probabilidad de todos los eventos medibles para \mathbb{L}_d se conserva. Luego, si se tiene percolación en \mathbb{L}_d , también se tiene percolación en $\mathbb{L}_{d'}$, de modo que el primer evento está contenido en el segundo y así

$$\theta_p(d) \leq \theta_p(d').$$

□

Por lo tanto, la probabilidad crítica de percolación es decreciente, pues cualquier parámetro de conexión $p > p_c(d)$ donde se asegure que la probabilidad de percolación

en \mathbb{L}_d es positiva, también será un parámetro de conexión que está por encima del punto crítico para una retícula de dimensión mayor $\mathbb{L}_{d'}$, concluyendo que $p_c(d') \leq p_c(d)$.

TEOREMA 5.3. *Para $d \neq 1$, la probabilidad crítica de percolación en \mathbb{L}_d cumple*

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Para obtener la cota inferior consideremos $\sigma(n)$, el número de trayectorias de longitud n que comienzan en el origen. Sabemos que C_0 es infinita si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una trayectoria abierta que comienza en el origen, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) &\leq \mathbb{P}_p(\text{Existe una trayectoria abierta de longitud } n) \\ &\leq p^n \sigma(n). \end{aligned}$$

Ahora bien, hay $2d(2d-1)^{n-1}$ caminos de longitud n que comienzan en el origen, porque del origen se tienen $2d$ posibilidades para elegir la primera arista y después se tienen $2d-1$ aristas para elegir las siguientes; los caminos pueden autointersectarse y las trayectorias no, así que $\sigma(n) \leq \frac{2d}{2d-1}(2d-1)^n$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la probabilidad de percolación cumple

$$\theta_p(d) \leq \frac{2d}{2d-1} (p(2d-1))^n;$$

cuando $p < \frac{1}{2d-1}$, el lado derecho de la desigualdad tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto la probabilidad de percolación es nula. Así,

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d).$$

Aplicando esta desigualdad al modelo de percolación de una dimensión tenemos que $p_c(1) = 1$, es decir, la única forma de que ocurra percolación es que la probabilidad de conexión sea 1.

Para la cota superior recordemos que la probabilidad crítica es decreciente respecto a d , así que es suficiente probar que $p_c(2) < 1$. Aquí se necesita tomar en cuenta la retícula dual \mathbb{L}_2^* , asociándole un modelo de percolación de la siguiente manera: para cada configuración posible K en \mathbb{L}_2 , consideramos su configuración dual K^* , las aristas duales en K^* están abiertas si y sólo si sus aristas en K están cerradas; entonces la probabilidad de conexión en \mathbb{L}_2^* será $1-p$.

Llamemos $\beta(n)$ al número de ciclos en la gráfica dual de longitud n que rodean al origen. La componente C_0 es finita si y sólo si existe un ciclo abierto en la gráfica dual

que rodea al origen, así

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0| < \infty) &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_p(\text{Existe un ciclo abierto de longitud } n \text{ en el dual}) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} (1-p)^n \beta(n). \end{aligned}$$

Acotando muy crudamente a $\beta(n)$, vemos que si el ciclo rodea al origen al menos 4 de sus aristas intersectan los ejes y en particular hay al menos una que cruza el lado positivo del eje x , esta intersección no puede ser más allá del punto $(n + 1/2, 0)$ pues el ciclo tendría más de $2n$ aristas. Así, podemos elegir la arista del cruce de a lo más n formas distintas, luego para cada una de las $n - 1$ aristas restantes tenemos 3 opciones a elegir, de este modo $\beta(n) \leq n3^{n-1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Usemos $x = 3(1-p)$, así

$$\sum_{n \geq 1} \beta(n)(1-p)^n \leq \sum_{n \geq 1} \frac{n}{3}(x)^n \leq \sum_{n \geq 1} n \cdot x^n;$$

esta serie converge cuando $p < \frac{2}{3}$ por el criterio de la integral; notemos que una primitiva de tx^t es $\frac{x^t}{\log x} \left(t - \frac{1}{\log x} \right)$, de modo que al calcular la integral impropia encontramos una cota para la probabilidad de que no ocurra percolación,

$$\sum_{n \geq 1} n \cdot x^n \leq \int_1^\infty tx^t dt = \frac{x}{\log x} \left(1 - \frac{1}{\log x} \right);$$

pero además este valor tiende a cero conforme x tiende a cero, entonces para algún valor p' suficientemente cercano a 1, la cota será menor a uno. Teniendo que para p' , la probabilidad de percolación es positiva y así tenemos que

$$p_c(2) \leq p' < 1.$$

□

2. Cotas para la Probabilidad de Cruce de Rectángulos

La demostración que daremos del Teorema de Harris y Kesten, resulta de estudiar la probabilidad de tener cruces a lo largo de rectángulos tan grandes como queramos. A continuación damos métodos para acotar la probabilidad de tener cruces horizontales, con ayuda del lema de Harris vemos que estas probabilidades son positivas si la probabilidad de conexión es $1/2$; y con la ley de aproximación a 0-1 podemos mostrar que además tienden a 1 si se toman rectángulos cada vez más grandes y el parámetro de conexión es mayor a $1/2$.

Al lema del cruce horizontal de la pág. 15 se le puede agregar el modelo probabilístico de la siguiente manera

$$\mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_p(V(R^h)) = 1;$$

porque cada configuración pertenece a alguno de los dos eventos; esta afirmación es más débil porque no se aclara que no hay eventos de medida cero en donde existan los dos cruces o ninguno de ellos. Notemos que R^h es un rectángulo en la retícula dual, por lo que sus aristas están abiertas con probabilidad $1 - p$.

Luego podemos considerar $R' \in \mathbb{L}_2$, el rectángulo cuyas dimensiones coinciden con R^h rotado 90° con el modelo de parámetro $1 - p$ y así, expresar nuestra relación en términos sólo de cruces en rectángulos de \mathbb{L}_2 ; es decir,

$$(12) \quad \mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_{1-p}(H(R')) = 1.$$

Ahora bien, cuando el parámetro es $1/2$ y tomamos un rectángulo $R = [0, n + 1] \times [0, n]$ **semisimétrico**, éste tiene tantas posibilidades de ser atravesado horizontalmente como R^h verticalmente, pues los dos rectángulos tienen las mismas dimensiones y sus aristas están abiertas con la misma probabilidad; entonces,

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = 1/2;$$

considerando un cuadrado $S = [0, n] \times [0, n]$, todos los cruces horizontales de R implican la existencia de cruces horizontales en S así que

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(S)) \geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = 1/2;$$

además, para un cuadrado S la probabilidad de tener un cruce horizontal es la misma que la de tener un cruce vertical.

Estos resultados no dependen de cuan grande sea el rectángulo mientras éste sea semisimétrico o cuadrado, pero éstos no son lo suficientemente alargados como necesitamos. Para extender estas cotas a rectángulos de cualquier proporción utilizaremos el siguiente lema de Russo, Seymour y Welsh.

LEMA 5.4 (Russo, Seymour y Welsh). *Sea $R = [0, m] \times [0, 2n]$ un rectángulo de $m \times 2n$ con $m \geq n$. Sea $X(R)$ el evento de que haya dos caminos abiertos P_1 y P_2 dentro de R tales que P_1 es un cruce vertical de $S = [0, n] \times [0, n]$ y P_2 une algún vértice de P_1 con algún vértice del lado derecho de R , como en la figura 2. Entonces*

$$\mathbb{P}_p(X(R)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))\mathbb{P}_p(V(S))/2.$$

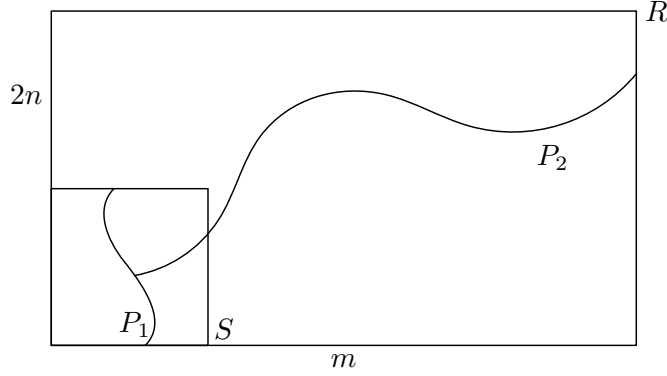


FIGURA 2. El evento $X(R)$ consiste en un cruce vertical en S y un camino abierto que una este cruce con el extremo derecho de R .

DEMOSTRACIÓN. De existir caminos que atraviesen S de arriba a abajo, hay uno de ellos Z_S que es el primero de izquierda a derecha; éste es el que se encuentra con el método que se utiliza para demostrar el lema del cruce horizontal. Y que un camino P sea el primer cruce vertical de S es independiente de las aristas a la derecha de P porque para saber si P es el primer cruce o no, sólo hay que revisar que las aristas entre el extremo izquierdo de R y el camino P no formen otro cruce más. Aprovecharemos esta independencia para dar la siguiente cota

$$(13) \quad \mathbb{P}_p(X(R) \mid Z_S = P) \geq \frac{\mathbb{P}_p(H(R))}{2}.$$

Dado un camino P , consideramos \bar{P} el camino formado por P , su reflejo respecto a la línea $y = n$ y la arista que une estos dos caminos como se muestra en la figura 3. Sin importar que \bar{P} sea un camino abierto o no cualquier cruce horizontal debe intersectar a \bar{P} en uno de sus vértices, esto se puede notar porque \bar{P} y el cruce horizontal utilizan sólo el interior de R .

Luego, la simetría de \bar{P} hace que por cada cruce que intersekte a \bar{P} fuera de S haya uno, el reflejado en la línea $y = n$, que intersekte a \bar{P} en S , es decir, que intersekte a P . Así la probabilidad del evento $Y(P)$, que exista un camino P_2 que una a P con el extremo derecho de R es

$$\mathbb{P}_p(Y(P)) \geq \frac{\mathbb{P}_p(H(R))}{2};$$

este evento sólo depende de las aristas a la derecha de P porque el camino sólo utilizará la región a la derecha. Así, $Y(P)$ es independiente de $Z_S = P$,

$$\mathbb{P}_p(Y(P) \mid Z_S = P) = \mathbb{P}_p(Y(P)).$$

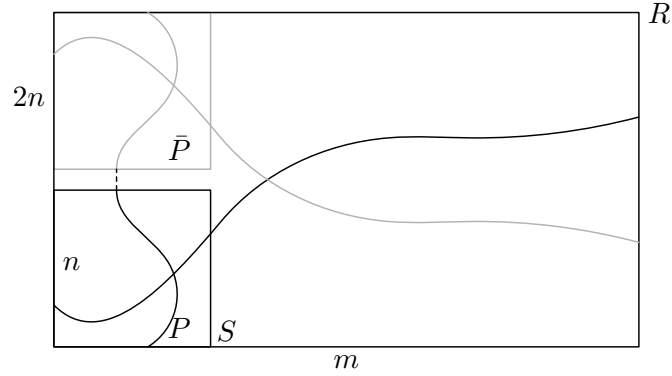


FIGURA 3. Para cada cruce horizontal de R y su cruce reflejado, exactamente uno intersecta al cruce vertical P en S .

Pero si sucede que P es efectivamente un camino abierto y además sucede $Y(P)$, entonces se satisfacen las condiciones del evento $X(R)$, por lo tanto al condicionar con $Z_S = P$ tenemos

$$\mathbb{P}_p(X(R) \mid Z_S = P) \geq \mathbb{P}_p(Y(P) \mid Z_S = P);$$

uniendo estas tres desigualdades tenemos (13). Y ya que el evento $V(S)$ es la unión disjunta de los eventos de la forma $\{Z_S = P\}$, con P corriendo sobre todos los caminos que cruzan S de arriba a abajo, si usamos la fórmula de la probabilidad total concluimos que

$$\mathbb{P}_p(X(R)) = \sum_P \mathbb{P}_p(X(R) \mid Z_S = P) \mathbb{P}_p(Z_S = P) \geq \frac{\mathbb{P}_p(H(R)) \mathbb{P}_p(V(S))}{2}.$$

□

Ahora denotemos la probabilidad de cruce de un rectángulo R de $m \times n$ como

$$h(m, n) = \mathbb{P}_{1/2}(H(R)),$$

$$h_p(m, n) = \mathbb{P}_p(H(R)).$$

Los siguientes lemas muestran dos métodos para obtener cotas de cruce para $h(m, n)$ a partir de cotas de cruce para rectángulos menos largos.

LEMA 5.5 (Método 1). *Si $m_1, m_2 > n$, entonces*

$$h(m_1 + m_2 - n, 2n) \geq h(m_1, 2n)h(m_2, 2n)/2^5.$$

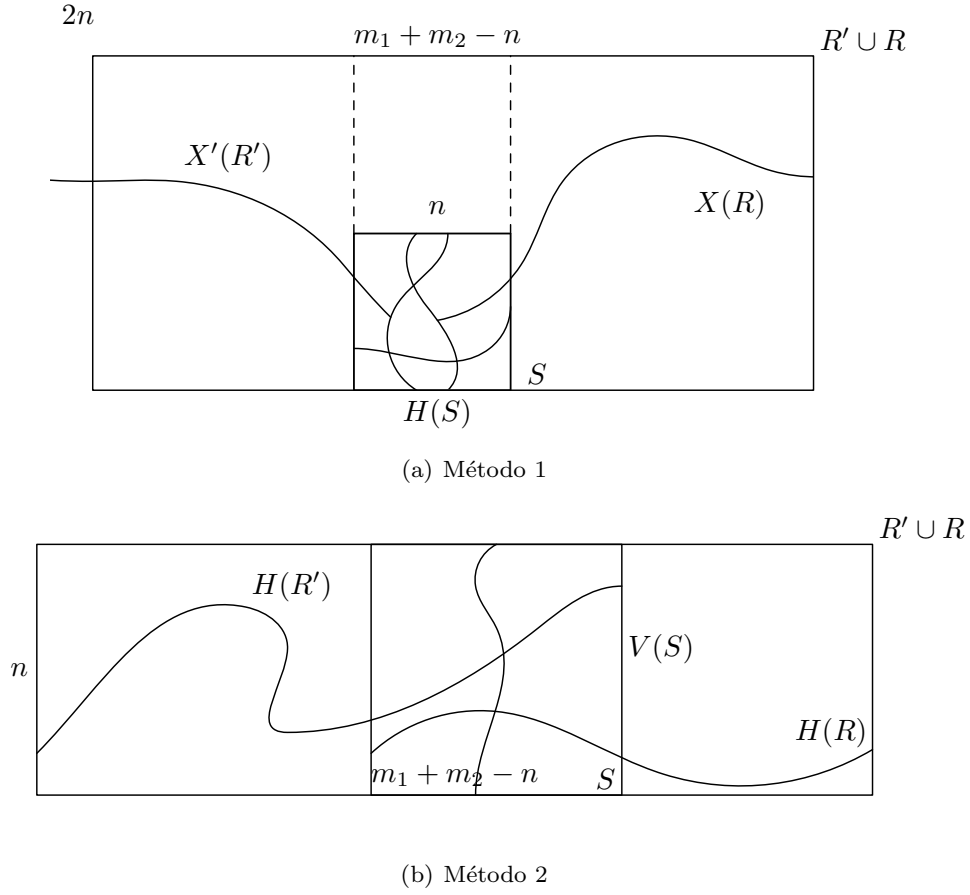


FIGURA 4. Para obtener cruces de rectángulos largos, basta intersectar cruces horizontales, verticales y eventos $X(R)$ adecuados.

DEMOSTRACIÓN. Sean R' y R rectángulos de $m_1 \times 2n$ y $m_2 \times 2n$ respectivamente y tales que se traslapan en un rectángulo de $n \times 2n$; S un cuadrado de $n \times n$ como en la fig.4(a). Sea $X'(R')$ el evento definido de manera análoga a $X(R)$ pero reflejado horizontalmente.

Ya que los eventos $X'(R')$, $H(S)$ y $X(R)$ son crecientes y su intersección muestra la existencia de un cruce en el rectángulo $R' \cup R$, entonces utilizando el lema de Harris y el lema de RSW tenemos que

$$\begin{aligned} h(m_1 + m_2 - n, 2n) &\geq \mathbb{P}_{1/2}(X'(R'))\mathbb{P}_{1/2}(H(S))\mathbb{P}_{1/2}(X(R)) \\ &\geq \frac{h(m_1, 2n)h(m_2, 2n)}{2^5}. \end{aligned}$$

□

LEMA 5.6 (Método 2). *Si $m_1, m_2 > 2n$, entonces*

$$h(m_1 + m_2 - 2n, 2n) \geq h(m_1, 2n)h(m_2, 2n)/2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean R y R' rectángulos de $m_1 \times 2n$ y $m_2 \times 2n$ respectivamente y tales que se traslapan en un cuadrado S de $2n \times 2n$. Como en la fig.4(b).

Del mismo modo que el argumento del primer método, tenemos que $H(R)$, $V(S)$ y $H(R')$ son eventos crecientes cuya intersección está contenida en $H(R \cup R')$. Por el lema de Harris tenemos que

$$\begin{aligned} h(m_1 + m_2 - 2n, 2n) &\geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R'))\mathbb{P}_{1/2}(V(S))\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) \\ &\geq h(m_1, 2n)h(m_2, 2n)/2. \end{aligned}$$

□

Este tipo de métodos nos ayuda a encontrar cotas para $h(m, n)$, su valor exacto no es tan relevante como asegurar que la probabilidad de cruce se mantiene positiva sin importar el tamaño del rectángulo. Así tenemos que para cualquier proporción dada ρ , existe una constante $c(\rho)$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$h(\rho n, n) \geq c(\rho);$$

en particular, utilizando el primer método con dos cuadrados de $2n \times 2n$ obtenemos $h(3n, 2n) \geq 2^{-7}$, luego con dos rectángulos de $3n \times 2n$, $h(5n, 2n) \geq 2^{-19}$ y finalmente

$$h(6n, 2n) \geq \frac{h(5n, 2n)h(2n, 2n)}{2^5} \geq 2^{-25}.$$

Harris demostró que la probabilidad crítica de percolación en \mathbb{L}_2 tenía que ser mayor a $1/2$ porque con esa probabilidad de conexión la probabilidad de percolación es 0. Para esto se considera una sucesión de anillos en la retícula dual; buscamos que la probabilidad de que todos ellos estén abiertos sea cero y esto sucede si la probabilidad de tener anillos de aristas duales abiertas tiene una cota positiva.

Con lo que sabemos hasta el momento de los cruce horizontales es más que suficiente para demostrar el Teorema de Harris, pues un ciclo se puede formar con la intersección de 4 cruces adecuados.

TEOREMA 5.7 (Teorema de Harris). *La probabilidad de percolación de aristas en \mathbb{L}_2 y probabilidad de conexión $1/2$ es cero.*

DEMOSTRACIÓN. Si colocamos 4 rectángulos duales de $3n \times n$ como se muestra en la fig. 5 se forma un anillo de radio interior $n/2$ y radio exterior $3n/2$. Nombrando A_k , $k \geq 1$, a los anillos con $n = 4^k$ tenemos que el radio exterior de A_k es más pequeño que el radio interior de A_{k+1} ; así que podemos colocar a los anillos concéntricamente

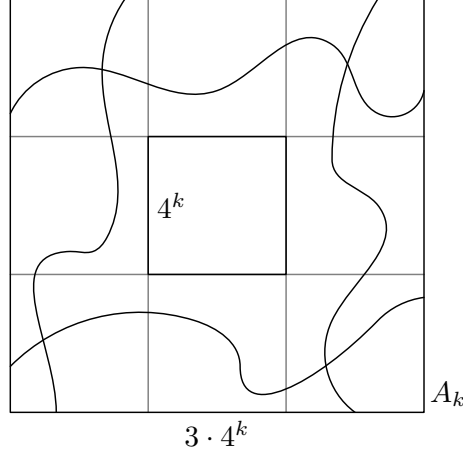


FIGURA 5. Tener cuatro cruces en los rectángulos que forman a A_k implica que existe un ciclo abierto en el dual que rodea al origen y por lo tanto C_0 debe de ser finita.

de manera que sean subconjuntos disjuntos de la retícula \mathbb{L}_2^* y todos ellos rodeando al origen.

Ahora llamemos E_k al evento de tener un ciclo abierto (en el dual) dentro de A_k que rodee al origen. Como A_k está formado por 4 rectángulos, si todos ellos tienen cruces longitudinales, entonces se cumple E_k y como los cruces son eventos crecientes, por el lema de Harris tenemos que

$$\mathbb{P}_{1/2}(E_k) \geq h(3n, n)^4 \geq 2^{-100};$$

aquí es importante que el modelo de percolación en la retícula dual también tiene parámetro 1/2. Además si ocurre E_k , entonces la componente C_0 está acotada por un ciclo de aristas abiertas en el dual, y por el Teorema 1.5, sabemos que C_0 es una componente finita.

De modo que para que ocurra percolación es necesario que no ocurra E_k para ninguna $k \in \mathbb{N}$; es decir,

$$\theta(1/2) \leq \mathbb{P}_{1/2}(\cap_{k \geq 1} E_k^c);$$

pero construimos los anillos A_k disjuntos, para que los eventos E_k sean independientes, entonces para cualquier $N \geq 1$

$$\mathbb{P}_{1/2}(\cap_{k=1}^N E_k^c) \leq \prod_{k=1}^N (1 - 2^{-100}) = (1 - 2^{-100})^N;$$

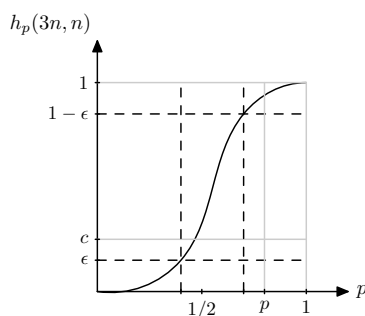


FIGURA 6. Para asegurar que p queda del lado derecho de la ventana, pediremos que ϵ sea menor que c y que el ancho de la ventana sea menor que la distancia entre $1/2$ y p .

así, $\theta(1/2)$ es menor que una sucesión que tiende a cero. □

Para el Teorema de Kesten necesitamos conocer mejor las probabilidades $h_p(\rho n, n)$, $p > 1/2$, pues es importante que la probabilidad de un cruce horizontal no sólo sea positiva, sino que se acerque cada vez más a 1 conforme las dimensiones de los rectángulos crecen; de hecho, necesitaremos cotas explícitas. Primero probaremos que las probabilidades de cruce tienden a 1 para el caso particular de rectángulos de $3n \times n$.

TEOREMA 5.8. *La probabilidad de cruce $h_p(3n, n) \rightarrow 1$, si $n \rightarrow \infty$ y $p > 1/2$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo que hay que probar es que para cualquier $\epsilon > 0$, a partir de cierto momento tenemos que $h_p(3n, n) \geq 1 - \epsilon$, donde lo que estamos variando es $n \in \mathbb{N}$.

Esto se puede probar con ayuda de la ley de aproximación a 0-1 de Russo que asegura que existe una ventana, $(p_0 - \epsilon, p_0 + \epsilon)$, de ancho 2ϵ antes de la cual $h_p(3n, n) \leq \epsilon$ y después de la cual $h_p(3n, n) \geq 1 - \epsilon$; aquí estamos fijando a n y variando p .

Sea R_n un rectángulo de $3n \times n$; como $h(3n, n) \geq c = 2^{-25}$, entonces $p = 1/2$ sirve como alfiler para fijar un poco mejor la ventana. Si comenzamos con $\epsilon < c$ entonces

$$p_0 - \epsilon \leq 1/2;$$

además si $2\epsilon \leq p - 1/2$ entonces la ventana será más angosta que la distancia entre $1/2$ y p , de modo que

$$p_0 + \epsilon \leq p;$$

y sabremos que para p , la probabilidad del cruce es mayor a $1 - \epsilon$ como necesitamos, ver fig. 6.

En cuanto a las hipótesis del teorema, nuestros eventos $H(R_n)$ son crecientes y dependen de una cantidad finita de aristas, las del rectángulo R_n . Sólo falta acotar suficiente las influencias del evento, con $\eta = \eta(\epsilon)$.

Analizando las configuraciones ω^+ y ω^- que están en la frontera $\delta_e H(R_n)$, podemos ver que todos los cruces horizontales de ω^+ pasan por la arista $e = ab$ y todos los cruces verticales de ω^- pasan por la arista $e^* = uv$, porque de no ser así, la arista e no sería esencial para que $H(R_n)$ ocurra.

Ahora bien, descartando e y e^* hay al menos un camino abierto de longitud mayor a $\frac{3n-1}{2}$ que comienza en el vértice a ó b y un camino abierto en el dual de longitud mayor a $\frac{n-1}{2}$ que comienza en el vértice u ó v , como se muestra en la fig. 7.

Si tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq \frac{n-1}{2}$, entonces podemos dividir $\delta_e H(R_n)$ en dos conjuntos δ_a y δ_b según sea a ó b el vértice que está conectado al extremo más alejado de a y b sin considerar la arista e . Así, pertenecer a δ_a o δ_b implica que hay una trayectoria abierta de longitud mayor a N que comienza en a ó b , respectivamente. Por la invarianza del modelo de percolación bajo traslaciones tenemos que

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R_n)) = \mathbb{P}_p(\delta_a) + \mathbb{P}_p(\delta_b) \leq 2\mathbb{P}_p(0 \rightarrow N).$$

Análogamente, el evento $\delta_e H(R_n)$ se divide en los conjuntos δ_u y δ_v en donde, sin tomar en cuenta la arista dual e^* , aseguramos que existe una trayectoria abierta en el dual de longitud mayor a N que comienza en u ó v , y se conecta con el lado horizontal más alejado de ellos. Obtenemos entonces, dado que el modelo dual tiene parámetro $1-p$,

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R_n)) = \mathbb{P}_p(\delta_u) + \mathbb{P}_p(\delta_v) \leq 2\mathbb{P}_{1-p}(0 \rightarrow N).$$

Utilizando el Teorema de Harris, que equivale a afirmar que la probabilidad de tener trayectorias de longitud n que comienzan en el origen tiende a cero conforme n tiende a infinito y $p = 1/2$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ a partir de la cual

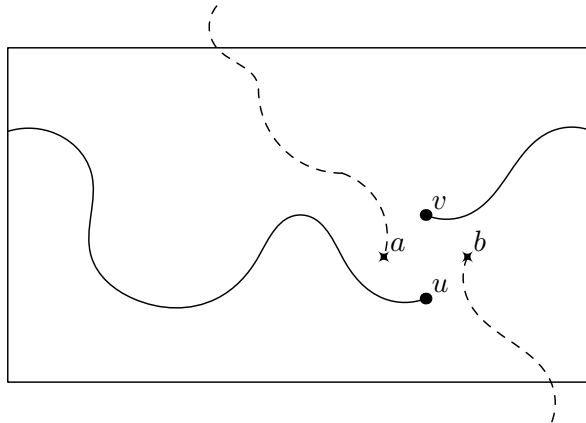
$$\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightarrow N) \leq \frac{\eta}{3},$$

y por la monotonía de los eventos crecientes tenemos

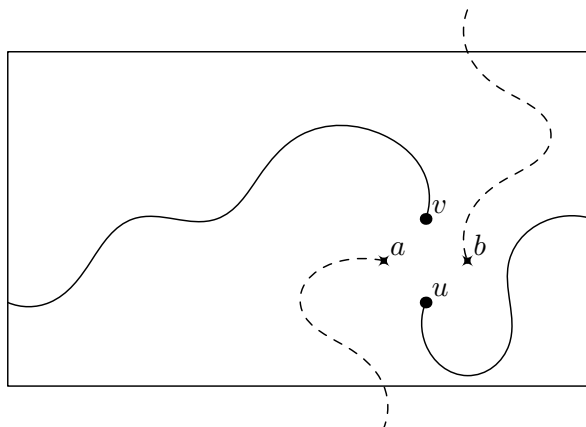
$$\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightarrow N) \geq \begin{cases} \mathbb{P}_p(0 \rightarrow N) & \text{si } p < 1/2 \\ \mathbb{P}_{1-p}(0 \rightarrow N) & \text{si } p \geq 1/2; \end{cases}$$

en ambos casos, nos permite acotar las influencias de $H(R_n)$, para toda $p \in [0, 1]$ y para cualquier arista $e \in R_n$,

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R_n)) \leq \frac{2}{3}\eta < \eta.$$



(a) Pivote 1



(b) Pivote 2

FIGURA 7. Sin tomar en cuenta las aristas e ó e^* sólo uno de sus vértices está conectado con el extremo horizontal o vertical más alejado de la arista.

Así, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq 2N + 1$, entonces $H(R_n)$ cumple las condiciones para aplicar la ley de aproximación a 0-1. Con ϵ suficientemente pequeño nos referimos a las condiciones mencionadas arriba,

$$\epsilon \leq \min \left\{ c, \frac{1/2 - p}{2} \right\},$$

con las cuales aseguramos que $p \geq p_0 + \epsilon$ y entonces $h_p(3n, n) \geq 1 - \epsilon$, como queríamos. \square

Ya que sabemos que $h_p(3n, n) \rightarrow 1$ para $p < 1/2$, nos será necesario ver qué tan rápido se da esta convergencia; ahora utilizaremos cruces internos; es decir, cruces que no utilizan las aristas de la frontera del rectángulo. Aquí se considera el modelo con parametro $p > 1/2$ fijo.

En los métodos para encontrar cruces de nuevos rectángulos se colocaban otros más pequeños, uno al lado de otro y se usaba la correlación positiva de los eventos crecientes. Aquí, colocaremos unos rectángulos encima de otros y será necesario pedir que los cruces de cada rectángulo sean independientes; es por esto que utilizaremos sólo **cruces internos**, es decir, caminos que vayan de un lado a otro del rectángulo R pero sin utilizar las aristas de la frontera de R , pues son las que se comparten con rectángulos aledaños.

El tipo de rectángulos R_n en los que nos enfocamos son de $2n \times n$ y nos auxiliaran los **cuadrados** S_n y **rectángulos largos** L_n de $n \times n$ y $4n \times n$, respectivamente. Del mismo modo, denotaremos a sus probabilidades de tener un cruce interno como i_n , s_n y l_n respectivamente.

Con el método 2 de la sección anterior podemos acotar l_n (ver figura 8), y como los cuadrados S_n están contenidos en los rectángulos R_n también tenemos $i_n \geq s_n$, de modo que

$$l_n \geq i_n^3 s_n^2 \geq i_n^5.$$

Ahora bien, colocando dos rectángulos largos como L_n uno encima del otro obtenemos R_{2n} y si alguno de los dos rectángulos largos tiene un cruce interno, entonces R_{2n} también tiene uno; luego, calculando la probabilidad de que R_{2n} no tenga un cruce interno obtenemos

$$1 - i_{2n} \leq (1 - l_n)^2 \leq (1 - i_n^5)^2;$$

pues si no hay ningún cruce interno en R_{2n} , entonces tampoco hay cruces internos en ninguno de los rectángulos largos y esto eventos son independientes. Así, si i_n está muy cerca de 1, entonces también i_{2n} está muy cerca de 1, pero ¿qué tanto?

PROPOSICIÓN 5.9. *Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para toda $k \geq 1$, la probabilidad de no tener un cruce interno está acotada por*

$$1 - i_{2^k n} \leq \frac{1}{2^k 50}.$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzando con $k = 0$, sí existe $n \in \mathbb{N}$ para la que se cumple la desigualdad que queremos pues las aristas internas de R_n están contenidas en un

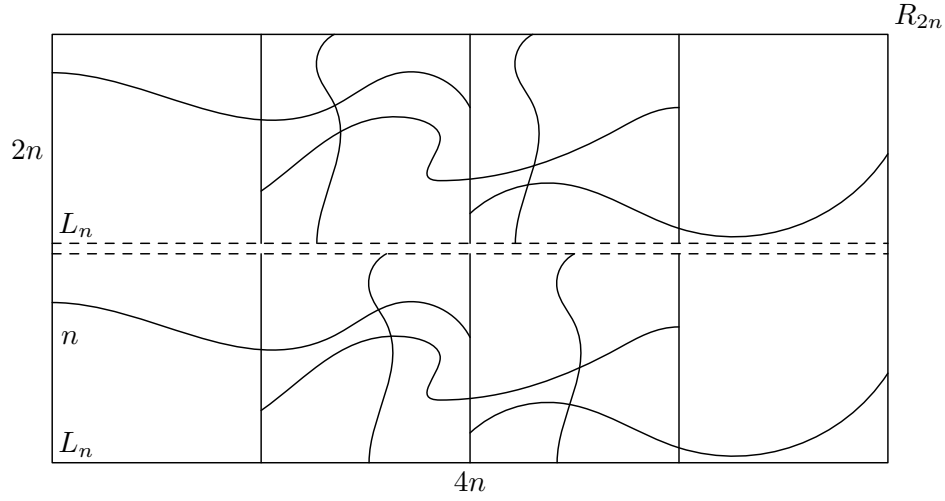


FIGURA 8. Si el rectángulo R_{2n} no tiene un cruce interno entonces ninguno de los dos rectángulos largos lo tiene.

rectángulo de $3(n-2) \times n-2$ si $n \geq 6$, de modo que por el Teorema 5.8,

$$i_n \geq h_p(3(n-2), n-2) \geq 1 - 1/50$$

para n es suficientemente grande. Ahora hagamos $\epsilon = 1 - i_n$ y notemos que como $\epsilon \leq 1$, un simple cálculo nos da $1 - (1 - \epsilon)^5 \leq 5\epsilon$ y así,

$$1 - i_{2n} \leq (1 - i_n^5)^2 \leq 25\epsilon^2;$$

pero como $\epsilon \leq 1/50$, entonces también tenemos que

$$1 - i_{2n} \leq \frac{1 - i_n}{2} \leq \frac{1}{2 \cdot 50}.$$

A partir de ese momento, iterando podemos obtener

$$1 - i_{2^k n} \leq \frac{1 - i_{2^{k-1} n}}{2} \leq \dots \leq \frac{1 - i_n}{2^k} \leq \frac{1}{2^k 50}.$$

Si bien, no conocemos quién es n con exactitud, sabemos los valores $1 - i_{2^k n}$ decrecen de manera que podemos controlar muy bien. \square

Para el Teorema de Kesten probaremos que el punto crítico de percolación tiene que ser menor que $1/2$, pues para cualquier parámetro mayor, la probabilidad de tener una c.c. infinita es 1; esto se logra mostrando que, con probabilidad positiva, existen trayectorias cada vez más largas que se intersectan unas con otras formando una trayectoria de longitud infinita.

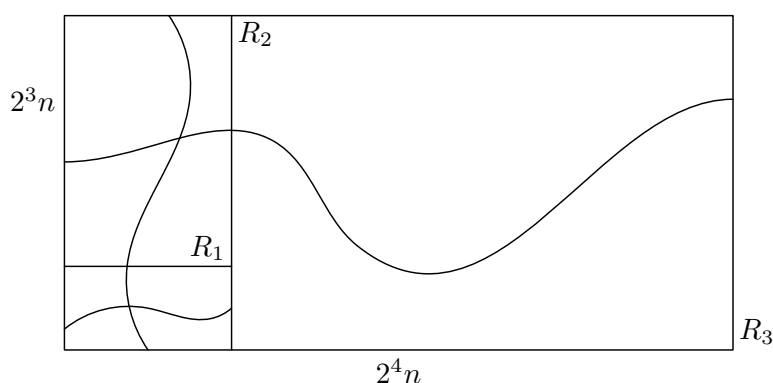


FIGURA 9. Cuando todos los rectángulos R_k así dispuestos tienen cruces longitudinales, muestran que existe una c.c. infinita.

TEOREMA 5.10 (Teorema de Kesten). *Para percolación de aristas en \mathbb{L}_2 y probabilidad de conexión $p > 1/2$, tenemos que la probabilidad de encontrar una c.c. infinita es 1: $\varphi_p(2) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Aquí utilizaremos que la probabilidad de tener trayectorias cada vez más largas (vistas como cruces internos) es cada vez más cercano a 1; sin embargo podría suceder que aún así no hubiese probabilidad positiva de encontrar trayectorias infinitas. Daremos una construcción que asegura que la existencia de trayectorias de longitud infinita tiene probabilidad positiva.

Para esto consideremos los rectángulos R_k de $2^{k+1}n \times 2^k n$, con n que cumpla la condición de la Proposición 5.9 de los cruces internos. A éstos los colocamos, como en la figura 9, de tal modo que su esquina inferior izquierda esté en el origen y su lado más largo sea, alternadamente, vertical si k es par y horizontal si k es impar.

Si dos rectángulos consecutivos tienen cruces internos (longitudinales), éstos se intersectan teniendo así una trayectoria aún más larga. Así, cuando todos los rectángulos

R_k tienen un cruce interno, denotado $I(R_k)$, existe una trayectoria de longitud infinita que comprueba la existencia de una c.c. infinita, es decir

$$\mathbb{P}_p(\cap_{k \geq 1} I(R_k)) \leq \varphi_p(2);$$

utilizando el complemento de la probabilidad de la izquierda tenemos

$$\mathbb{P}_p(\cup_{k \geq 1} I(R_k)^c) \leq \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_p(I(R_k)^c) \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k 50} < 1,$$

entonces $\varphi_p(2) > 0$, y como se trata de un evento infinito su probabilidad es 1. \square

Finalmente, uniendo las conclusiones del Teorema de Harris y del Teorema de Kesten, obtenemos que el punto crítico de percolación de aristas en \mathbb{L}_2 es exactamente $1/2$.

Guía Notacional

Notación de gráficas

Símbolo	Descripción
K	Configuración, subgráfica de \mathbb{L}_2
K^*	Configuración dual de K , subgráfica de \mathbb{L}_2^*
K^c	Subgráfica inducida por los vértices que no son extremos de aristas de K
K_∞	Componente conexa infinita de K^c
$K_{3,3}$	Ejemplo de subgráfica no aplanable
$v \rightarrow n$	Existe una trayectoria de longitud n a partir de v

Notación de probabilidad

Símbolo	Descripción
\mathcal{B}	Borealianos, σ -álgebra de los intervalos abiertos en \mathbb{R}
$\mathbb{E}(\cdot)$	Valor esperado de una variable aleatoria
$\mathbb{E}(\cdot B)$	Valor esperado de una variable aleatoria dado un evento B
\mathcal{F}_0	Álgebra de los eventos finitamente generados
\mathcal{F}_S	σ -álgebra generada por la unión de las σ -álgebras con índice en S
\mathcal{F}_∞	σ -álgebra de los eventos infinito
\mathcal{I}	Clase de los intervalos semi-infinitos por la derecha: (a, ∞)
\mathbb{P}	Medida de probabilidad
$\mathbb{P}(\cdot B)$	Medida de probabilidad dado un evento B
$\sigma(X)$	σ -álgebra generada por la variable aleatoria X
$\sigma(A)$	σ -álgebra generada por la clase A

Notación del espacio producto

Símbolo	Descripción
$A + x$	Evento con las configuraciones de A trasladadas por x
C_B, C	Cilindros
E_k^+, E_k^-	Rectángulos generados por la k -ésima arista
\mathbb{P}^*	Medida Exterior de \mathbb{P}
ω^k	Rectángulo, intersección de eventos $E_k^{\sigma_k}$, con $k \in \mathbb{N}$
ω_k	Estado de la arista k en la configuración ω

Notación de umbrales

Símbolo	Descripción
\leq^ϵ	ϵ -dominada, ver pág. 56
$C_A(\omega)$	Conjunto de aristas esenciales, ver ver pág. 54
$\delta A, \delta^I A, \delta_i A$	Frontera de un evento A
$\mathbb{P}_p(\delta_i A)$	Influencia de la arista i en el evento A
$S = A \setminus B$	Banda, diferencia de dos eventos crecientes
$S_i \omega$	Configuración i -par, ver pág. 52
χ_A	Función indicadora del evento A

Notación de Percolación

Símbolo	Descripción
C_0	Componente conexa del origen
$H(R)$	Existe un cruce horizontal en R
$I(R)$	Existe un cruce horizontal en el interior de R
L_n	Rectángulo de $4n \times n$
\mathbb{L}_d	Retícula cuadrada de dimensión d
$\mathbf{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$	Probabilidad de conexión
$p_c(d)$	Punto crítica de percolación
\mathbb{P}_p	Medida del modelo de percolación con parámetro de conexión p
R	Gráfica inducida por $[0, m] \times [0, n] \subset \mathbb{Z}^2$
R^h	Gráfica inducida por $[1/2, m - 1/2] \times [-1/2, n + 1/2] \subset \mathbb{Z}_*^2$
S, S_n	Rectángulo de $n \times n$
$V(R)$	Existe un cruce vertical en R
$\varphi_p(d)$	Probabilidad de tener una c.c. infinita

Bibliografía

- [Bar95] R. G. Bartle, *The elements of integration and lebesgue measure*, Wiley, 1995.
- [Bau95] H. Bauer, *Probability theory*, Studies in mathematics, vol. 23, de Gruyter, 1995.
- [BB06a] O. Riordan B. Bollobás, *Percolation*, Cambridge, University, 2006.
- [BB06b] ———, *A short proof of the harris- kesten theorem*, Bulletin of the London Mathematical Society (2006), no. 38, 470–484.
- [BB07] ———, *A note on the harris- kesten theorem*, European Journal of Combinatorics (2007), no. 28, 1720–1723.
- [Bil95] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley, 1995.
- [Bol98] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Graudate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer, 1998.
- [EF96] G. Kalai E. Friedgut, *Every monotone graph property has a sharp threshold*, Proceedings of the American Mathematical Society **124** (1996), no. 10, 2993–3002.
- [Efr94] A. Efros, *Física y geometría del desorden*, Moscú: URSS, 1994.
- [Gal95] Janos Galambos, *Advanced probability theory*, Probability pure and applied, vol. 10, M. Dekker, 1995.
- [Gut05] Allan Gut, *Probability : a graduate course*, Springer texts in statistics, Springer, 2005.
- [Rus82] Lucio Russo, *An approximate zero-one law*, Probability Theory and Related Fields (1982), no. 61, 129–149.
- [Sah94] M. Sahimi, *Applications of percolation theory*, Taylor and Francis, 1994.
- [Tal94] M. Talagrand, *On russo's approximate zero-one law*, The Annals of Probability **22** (1994), no. 3, 1576–1587.