SERIES DE TIEMPO
LICENCIATURA EN CIENCIA DE DATOS
IIMAS-UNAM 4

RAMSÉS H. MENA

CLASE 4: MODELOS LINEALES

En las secciones 8–10 estudiamos algunas metodologías para trasformar un proceso $\{X_t\}$ a un proceso estacionario, denotado como $\{Y_t\}$. Ahora analizaremos una clase de modelos estacionarios para este componente que resulta de gran interés en las aplicaciones.

Antes de introducir estos modelos necesitamos el concepto de ***ruido blanco*** dado como sigue

Definición 7. Un proceso $\{\omega_t\}$ se dice que es de ***ruido blanco*** com media 0 y varianza σ^2, denotado por

$$\{\omega_t\} \sim \mathrm{W}(0, \sigma^2)$$

si y sólo si $\{\omega_t\}$ tiene media 0 y función de covarianza

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0. \end{cases} \tag{32}$$

Notemos que esta definición de ruido blanco satisface las condiciones de un proceso débilmente estacionario, ver Definición 5, y por lo tanto puede haber cierta dependencia de orden mayor a dos en dicho proceso. Cuando se tenga que $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, se dice que $\{\varepsilon_t\}$ es un ***ruido blanco en el sentido estricto o Gaussiano***. Lo anterior se debe a que las distribuciones finito dimensionales de la distribución Gaussiana están caracterizadas mediante sus primeros dos momentos, e.g. media y función de covarianzas, y por lo tanto estacionariedad débil se traduce a estacionariedad estricta.

13. Modelos Autoregresivos (AR)

Los modelos ***autoregresivos de orden*** p, AR(p), están desarrollados con la idea de que el valor presente de una serie, y_t, se puede explicar mediante las p observaciones pasadas del mismo, $y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}$. Es decir, el valor presente regresa, en cierta proporción, a algunos de sus p valores previamente observados. En notación

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \omega_t, \tag{33}$$

donde $\phi_1, \ldots, \phi_p$ son constantes. La ecuación (33) se puede ver como un modelo de regresión, pero Y_t es "regresado" a su pasado en vez de a otras variables, como típicamente se hace en análisis de regresión, de esto el prefijo "auto". Por simplicidad, usualmente se supone que la media de $\{Y_t\}$ es 0, $\mu = 0$, de no ser el caso, para proseguir con un modelo de media 0, se puede reemplazar a los datos y_t por $y_t - \mu$.

Otras maneras de denotar el proceso AR(p) es mediante

$$Y_t = \phi' \mathbf{Y_{t-1}} + \omega_t, \tag{34}$$

donde $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$ y $\mathbf{Y_{t-1}} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)'$. Esta notación todavía se asemeja más a la encontrada en análisis de regresión con la diferencia de que en este caso la componente $\mathbf{Y_{t-1}}$ tiene componentes aleatorios.

Otra forma de denotar al proceso AR(p), más común en el lenguaje de series de tiempo, es mediante el ***operador de retraso*** definido como

$$B^j Y_t = Y_{t-j} \tag{35}$$

dado por

$$\phi(B) Y_t = \omega_t, \tag{36}$$

donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p \tag{37}$$

se conoce como el ***operador autoregresivo***. En ocasiones, se hace explicito el orden de dicho operador en la notación mediante ϕ_p.

13.1. Caso AR(1)

Considérese un modelo AR(1), entonces se tiene

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + \omega_t = \phi(\phi \mathrm{Y}_{t-1} + \omega_{t_1}) + \omega_{t-1} \\ &= \phi^2 Y_{t-2} + \phi \omega_{t-1} + \omega_t \\ &\vdots \\ &= \phi^k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \omega_{t-j}. \end{aligned} \tag{38}$$

Haciendo esto de manera iterativa y bajo el supuesto de que $|\phi| < 1$ y $\mathrm{Var}(Y_t) < \infty$ se puede demostrar que un proceso AR(1) se pude caracterizar mediante

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \omega_{t-j}, \tag{39}$$

a lo que se le conoce como un proceso de ***promedios móviles infinito***, MA(∞)[2]. Basta con ver que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left(Y_t - \sum_{j=0}^{n} \phi^j\, \omega_{t-j},\right)^2\right\} = 0.$$

Con esto se puede ver que

$$\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j\, \mathbb{E}(\omega_{t-j}) = 0$$

donde la segunda igualdad se sigue del hecho que $\{\omega_t\}$ es ruido blanco. También se puede verificar que

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j\, \omega_{t+h-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k\, \omega_{t-k}\right)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \phi^j\, \phi^k\, \gamma(h-j+k) \\
&= \sigma_\omega^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} = \sigma_\omega^2\, \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \\
&= \frac{\sigma_\omega^2\, \phi^h}{1-\phi^2}, \quad h \geq 0, \qquad (40)
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se sigue debido a que $\gamma(\cdot) \neq 0$ si y sólo si $k = j - h$ ó $j = h + k$. Por lo tanto la ACF correspondiente a un proceso AR(1) esta dado por

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h.$$

Por otro lado, si $|\phi| > 1$, la serie en (39) no es convergente. No obstante, se podría modificar el mismo argumento para obtener la serie

$$Y_{t+1} = \phi\, Y_t + \omega_{t+1} \qquad (41)$$

en cuyo caso se tendría

$$Y_t = \phi^{-k}\, Y_{t+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \phi^{-j}\, \omega_{t+j}, \qquad (42)$$

lo cual provee de una solución estacionaria a una ecuación del tipo $Y_t = \phi Y_{t-1} + \omega_t$ ya que $|\phi^{-1}| < \infty$. Este resultado, sugiere un modelo AR(1)

$$Y_t \;=\; -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j}\, \omega_{t+j},$$

el cual claramente “depende del futuro”!, razón por la cual no es muy útil en aplicaciones. Así pues, en el estudio de series temporales vía modelos líneales, como los procesos AR, es conveniente suponer $|\phi| < 1$. Al modelo $\{Y_t\}$ resultante de dicha suposición se le conoce como ***causal*** ó ***independiente del futuro***.

Tarea: Demostrar que si $|\phi| = \pm 1$, en un proceso $Y_t = \phi Y_{t-1} + \omega_t$, no tiene solución estacionaria. HINT: Supón que existe una solución estacionaria y utiliza la ecuación de un AR(1) para derivar una expresión de la varianza de $Y_t - \phi^{n+1}\, Y_{t-n-1}$ que contradiga el supuesto de estacionariedad (débil!)

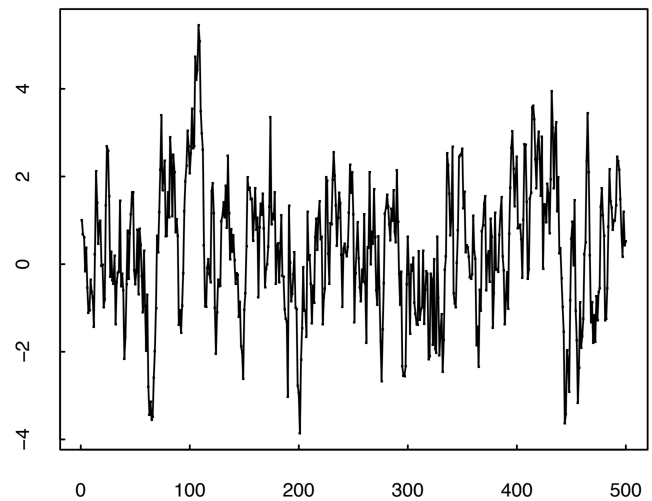

Figura 7: Simulación del proceso $Y_t = 0.8\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Las Figuras 7 y 8 muestran simulaciones de procesos AR(1) con ruido blanco Gaussiano.

Tarea: Como se ven las series simuladas de los modelos AR(1) con $\phi = 1$ y $\phi = -1$. Utiliza R.
Tarea: Como se ven las ACF's de los modelos simulados en las Figuras 7 y 8? Justifica tu respuesta.

14. Modelos de Promedios Móviles (MA)

Como una alternativa a los modelos autoregresivos, se tienen a los ***modelos de promedios móviles de orden*** q, denotados por MA(q) debido a su nombre en inglés. Este modelo asume que el valor presente de la serie, Y_t, esta dado por una combinación lineal de ruidos blancos, es decir

$$Y_t = \omega_t + \theta_1\, \omega_{t-1} + \theta_2\, \omega_{t-2} + \cdots + \theta_q\, \omega_{t-q}, \qquad (43)$$

[2] En la Sección 14 se introducirán los procesos de promedios móviles.

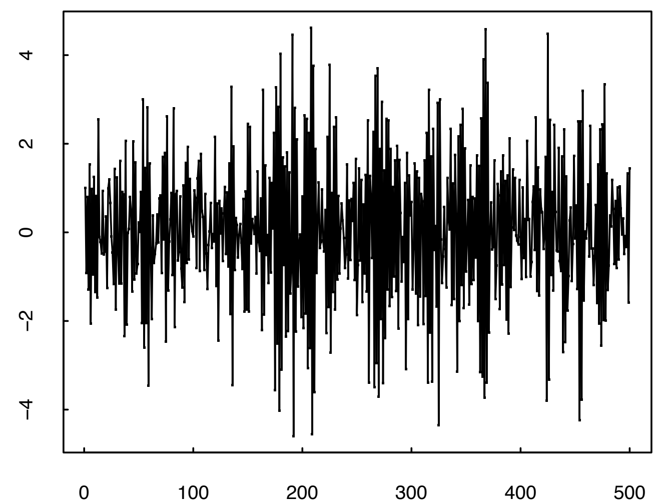

Figura 8: Simulación del proceso $Y_t = -0.8\,Y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

donde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ son constantes.

De manera análoga a los procesos AR, los procesos MA también se pueden escribir mediante el uso del operador de retraso

$$Y_t \;=\; \theta(B)\,\omega_t, \tag{44}$$

donde a

$$\theta(B) := 1 + \theta_1\,B + \theta_2\,B^2 + \cdots + \theta_q\,B^q$$

se le conoce como el ***operador de promedios móviles***. A diferencia de los procesos AR, los procesos MA son estacionarios para cualquier valor de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$.

Se puede ver fácilmente que la ACV y la ACF de un $\mathrm{MA}(1)$ están dadas por

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\,\sigma_\omega^2, & h = 0 \\ \theta\,\sigma_\omega^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1. \end{cases} \tag{45}$$

y

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+\theta^2)}, & h = 1 \\ 0, & h > 1. \end{cases} \tag{46}$$

respectivamente. Notemos que a diferencia de un $\mathrm{AR}(1)$ el proceso $\mathrm{MA}(1)$ únicamente esta correlacionado con su observación inmediata.

Tarea: Simular un proceso $\mathrm{MA}(1)$ con θ =0.2, 5.

15. Proceso de promedios móviles infinito

Si $\{\omega_t\} \sim \mathrm{W}(0,\sigma^2)$ entonces se dice que $\{Y_t\}$ es un proceso de promedios móviles "de ω_t" si existe una sucesión $\{\psi_t\}$, con $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, tal que

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\,\omega_{t-j}.$$

Usualmente a este proceso se le denota como $\mathrm{MA}(\infty)$.

El modelo $\mathrm{MA}(q)$ definido por (43) se puede ver como un $\mathrm{MA}(\infty)$ con $\psi_j = \phi_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$ y $\psi_j = 0, j > q$. De la misma forma vimos que el proceso $\mathrm{AR}(1)$ con $|\phi| < 1$ es un $\mathrm{MA}(\infty)$ si $\psi_j = \phi^j$, $j = 0, 1, \ldots, q$.

16. Modelos ARMA

En (33) y (43) se introdujeron los modelos autoregresivos y promedios móviles respectivamente, en esta sección exploraremos un modelo definido como la "combinación" de estos dos. En algunas situaciones reales el ajustar un modelo $\mathrm{AR}(p)$ puede resultar en un orden de rezago, p, muy grande y por lo tanto en un número grande de parámetros, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ a estimar. Una manera de reducir este problema es mediante la combinación de un proceso $\mathrm{AR}(p)$ (con p relativamente pequeño) y un proceso $\mathrm{MA}(q)$, el resultado se define como sigue

Definición 8. Un proceso $\{Y_t\}$ ***autoregresivo de promedios móviles*** de orden (p,q), denotado por ***ARMA***(p,q), se define mediante la ecuación

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \omega_t + \theta_1 \omega_{t-1} + \cdots + \theta_q \omega_{t-q} \tag{47}$$

donde $\omega_t \sim \mathrm{W}(0,\sigma^2)$ y los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ no tienen zeros en común.

El proceso $\mathrm{ARMA}(p,q)$ también tiene una representación en términos del operador de retraso dada por

$$\phi(B)\,Y_t = \theta(B)\,\omega_t. \tag{48}$$

Al igual que en los procesos AR y MA un requerimiento importante de los procesos ARMA es que estos sean estacionarios. Las condiciones para que un proceso $\mathrm{AR}(1)$ sea estacionario, vistas en la Sección (13), se satisfacen si y sólo si $\phi \neq \pm 1$, lo que es equivalente a que el polinomio $\phi(z) = 1 - \phi\,z \neq 0$ para $z = \pm 1$. La condición análoga para un proceso $\mathrm{ARMA}(p,q)$ es $\phi(z) = 1 - \phi_1\,z - \cdots - \phi_1\,z^p \neq 0$, para todo número complejo z con $|z| = 1$. Esta condición también asegura que la solución estacionaria resultante es ***única***.

Definición 9. Un proceso ARMA(p, q) definido por (48) es ***causal*** si existe una sucesión de constantes $\{\psi_j\}$ tales que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ y

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, \omega_{t-j}. \tag{49}$$

Es decir, puede expresarse en términos de una representación infinita de medias móviles que depende únicamente de valores pasados y presentes del ruido blanco.

Teorema 1. *Sea $\{Y_t\}$ un proceso ARMA(p, q) dado como en la Definición 8, entonces $\{Y_t\}$ es causal si y sólo si $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Los coeficientes en (49) están determinados por la relación*

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, z^j = \theta(z)/\phi(z), \quad |z| \leq 1. \tag{50}$$

Ver Brockwell and Davis (1991) para una demostración de este teorema. Usando este Teorema se puede verificar que cuando $\phi(\cdot)$ $\theta(\cdot)$ no tienen ceros en común y de estos ceros ninguno esta en el circulo unitario entonces el proceso $\{Y_t\}$ es la ***única solución estacionaria*** a la ecuación ARMA. Esta es la misma condición de estacionariedad en un proceso puramente AR(p), pero en un proceso ARMA(p, q) garantiza que la serie de medias móviles que lo representa converge.

De la ecuación (50) se pueden determinar los valores de $\{\psi_j\}$ mediante

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_1 \, z - \cdots - \phi_1 \, z^p)(\psi_0 + \psi_1 \, z + \cdots) \\ = \; & 1 + \theta_1 \, z + \cdots + \, \theta_q \, z^q \end{aligned} \tag{51}$$

Igualando los coeficientes de z^j, $j = 0, 1, \ldots$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \psi_0 \\ \theta_1 &= \psi_1 - \psi_0\phi_1 \\ \theta_2 &= \psi_2 - \psi_1\phi_1 - \psi_0\phi_2 \\ &\;\vdots \end{aligned} \tag{52}$$

o de manera equivalente

$$\psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_j \, \psi_{j-k} = \theta_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, \tag{53}$$

donde $\theta_0 := 1$, $\theta_j := 0$ para $j > q$, y $\psi_j := 0$ para $j < 0$.

Definición 10. Un proceso ARMA(p, q) se dice que es ***invertible*** si existen constantes $\{\pi_j\}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ y

$$\omega_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, Y_{t-j}, \;\; \text{para todo } t. \tag{54}$$

Invertibilidad es equivalente a la condición $\theta(z) \neq 0$ para toda $|z| \leq 1$.

Se puede ver que la sucesión de $\{\pi_j\}$ está determinada por la recurrencia

$$\pi_j + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \pi_{j-k} = -\phi_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, \tag{55}$$

donde $\phi_0 := -1$, $\phi_j := 0$ para $j > p$ y $\pi_j := 0$ para $j < 0$. Es decir, un proceso ARMA(p, q) se dice invertible si su parte de medias móviles MA(q) puede expresarse como una serie infinita de términos autorregresivos AR(∞) con términos convergentes.

Ejemplo 3. *Considérese el proceso ARMA$(1, 1)$ dado por*

$$Y_t - 0.5 \, Y_{t-1} = \omega_t + 0.4 \, \omega_{t-1}, \;\; \{\omega_t\} \sim W(0.\sigma^2). \tag{56}$$

En este caso se tiene que $\phi(z) = 1 - 0.5 \, z$ tiene un cero en $z = 2$, lo cual está afuera del círculo unitario. Por lo tanto, existe una única solución causal y estacionaria a la ecuación (56). De la ecuación (53) se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= 0.4 + 0.5 \\ \psi_2 &= 0.5(0.4 + 0.5) \\ \psi_j &= 0.5^{j-1}(0.4 + 0.5) \;\; j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{57}$$

Por otro lado $\theta(z) = 1 + 0.4 \, z$ tiene un cero en -2.5 el cual también está afuera del círculo unitario. En este caso, de la ecuación (55) se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 &= -(0.4 + 0.5) \\ \pi_2 &= -(0.4 + 0.5)(-0.4) \\ \pi_j &= -(0.4 + 0.5)(-0.4)(-0.4)^{j-1}, \;\; j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{58}$$