SERIES DE TIEMPO
LICENCIATURA EN CIENCIA DE DATOS
IIMAS-UNAM 6

RAMSÉS H. MENA
CLASE 6: MODELOS LINEALES III

23. Modelos ARMA multiplicativos

Cuando se tiene ciclicidad en una serie estacionaria se puede pensar en que se observa una serie estacionaria $s > 1$ veces al año. En las secciones 8 y 12, se revisaron algunos métodos para remover componentes de tendencia y ciclicidad, de tal forma que la la serie resultante sea estacionaria. Sin embargo, en algunos casos, la dependencia en el pasado tiende a ocurrir de manera más persistente en algunos rezagos que en otros. Una manera de modelar "de manera conjunta" este tipo de comportamiento es mediante el uso de ***modelos multiplicativos***.

Para entender mejor este modelo primero consideramos el ***modelo ARMA de estacionalidad pura*** denotado mediante ARMA$(P, Q)_s$, el cual toma la forma

$$\Phi_P(B^s)\, Y_t = \Theta_Q(B^s)\, \omega_t, \tag{79}$$

donde los operadores

$$\begin{aligned} \Phi_P(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \cdots - \Phi_P B^{Ps} \\ \Theta_Q(B^s) &= 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \cdots + \Theta_Q B^{Qs} \end{aligned}$$

son los componentes AR y MA estacionales de orden (P, Q) respectivamente. De forma análoga a los modelos ARMA sin ciclicidad, el modelo ARMA$(P, Q)_s$ es ***causal*** solamente cuando las raíces de $\Phi_P(z^s)$ están fuera del circulo unitario, y es ***invertible*** cuando las raíces $\Theta_Q(z^s)$ están fuera del circulo unitario.

Ejemplo 5. *Un modelo ARMA$(1,1)_{12}$ puede escribirse como*

$$(1 - \Phi B^{12})\, Y_t = (1 + \Theta B^{12})\, \omega_t$$

o

$$Y_t = \Phi Y_{t-12} + \omega_t + \Theta \omega_{t-12}.$$

Este modelo exhibe la serie Y_t en términos de sus rezagos pasados en múltiplos de periodos anuales de 12 meses. Estimación y predicción de estos modelos resultan en modificaciones simples del caso con un rezago. En particular, la condición causal require $|\Phi| < 1$ y la condición de invertibilidad requiere $|\Theta| < 1$.

En el caso de un modelo $MA(1)_{12}$, dado por

$$Y_t = \omega_t + \Theta \omega_{t-12}$$

se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= (1 + \Theta^2)\sigma^2 \\ \gamma(\pm 12) &= \Theta \sigma^2 \\ \gamma(h) &= 0, \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\rho(\pm 12) = \Theta/(1 + \Theta^2). \tag{80}$$

De forma análoga se puede verificar que en el caso de un AR$(1)_{12}$ se tiene que

$$\rho(\pm 12k) = \Phi^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{81}$$

Tarea: Demostrar que las ACF correspondiente a un proceso AR$(1)_{12}$ esta dada por (81). Hint: utiliza el resultado de que $\gamma(h) = \Phi\, \gamma(h - 12)$, para $h \geq 1$.

De forma análoga al caso de modelos ARMA sin estacionalidad, también se puede extender la definición de la PACF a modelos estacionalidad.

	AR$(P)_s$	MA$(Q)_s$	ARMA$(P, Q)_s$
ACF	Decrece en ks	se corta en Qs	Decrece en ks
PACF	se corta en Ps	Decrece en ks	Decrece en ks

Cuadro 2: Comportamiento de la ACF y PACF en modelos ARMA$(P, Q)_s$ causales e invertibles. Los valores en rezagos no estacionales $h \neq ks$, para $k = 1, 2, \ldots$ son cero.

En general se puede combinar los operadores no estacionales y estacionales para dar origen a los modelos ***ARMA multiplicativos*** denotados por ARMA$(p, q) \times (P, Q)_s$ y definidos por

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\, Y_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)\omega_t. \tag{82}$$

En este contexto a $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ se les conoce como los ***operadores regulares*** y a $\Phi_P(\cdot)$ y $\Theta_Q(\cdot)$ como los ***operadores anuales***. En un modelo de este tipo, los operadores regulares se emplean para modelar la correlación entre pares de componentes de $\{Y_t\}$ separados entre sí por $k = 1, 2, 3, \ldots$ períodos básicos, mientras que los operadores anuales describen la correlación entre pares de componentes separados entre sí por $k = s, 2s, 3s, \ldots$ períodos básicos. Aunque las propiedades de diagnóstico descritas en el Cuadro 1 no son estrictamente verdaderas para los modelos (82) el comportamiento tiende a ser muy parecido. De hecho en modelos multiplicativos, se tiende a ver una mezcla de los puntos señalados en los cuadros 1 y 2.

Ejemplo 6. *Considérese un modelo ARMA$(0.1) \times (1,0)_{12}$ dado por*

$$Y_t = \Phi\, Y_{t-12} + \omega_t + \theta\omega_{t-1},$$

donde $|\Phi| < 1$ y $|\theta| < 1$. Entonces, debido a que Y_{t-12}, ω_t y ω_{t-1} son no correlacionados, y Y_t es estacionario, $\gamma(0) = \Phi^2\gamma(0) + \sigma_w^2 + \theta^2\sigma_w^2$ ó

$$\gamma(0) = \frac{1+\theta^2}{1-\Phi^2}\,\sigma_w^2.$$

Si multiplicamos el modelo por Y_{t-h}, $h > 0$ y se toman valores esperados se puede verificar que $\gamma(1) = \Phi\gamma(11) + \theta\sigma_w^2$ y $\gamma(h) = \Phi\gamma(h-12)$, para $h \geq 2$.

Tarea: Demostrar que el ACF para el modelo del Ejemplo (6) está dado por

$$\begin{aligned}
\rho(12\,h) &= \Phi^h \quad h = 1,2,\ldots \\
\rho(12h-1) &= \rho(12h+1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}\Phi^h, \quad h = 0,1,2,\ldots \\
\rho(h) &= 0, \text{ en otro caso.}
\end{aligned}$$

Tarea: Simular una serie de tamaño 200 del modelo presentado en el Ejemplo 6 con parámetros $\Phi = 0.8$ y $\theta = -0.5$. Que puedes concluir de las ACF y PACF muestrales obtenidas de dicho modelo?

Al igual que en ajuste de modelos ARMA(p,q), en el ajuste de modelos ARMA$(p,q) \times (P,Q)_s$ puede ocurrir no estacionariedad. Por ejemplo, nos podemos imaginar una serie mensual en donde el promedio de enero sea aproximado al promedio de enero del año anterior, el de febrero aproximado al promedio de febrero del año anterior y así para todos los meses. En este caso se podrían modelar los promedios mensuales, Y_t, mediante

$$Y_t = D_t + \omega_t,$$

donde D_t es el componente estacional que varia lentamente de un año al que le sigue, de acuerdo a una caminata aleatoria,

$$D_t = D_{t-12} + \nu_t,$$

donde ν_t y ω_t son ruidos blancos no correlacionados. El ACF muestral de unos datos que siguen este modelo resultara en valores grandes que decaen muy lentamente en los rezagos $h = 12k$, para $k = 1,2,\ldots$. Si removemos el efecto de los años se ve que

$$(1-B^{12})\,Y_t = Y_t - Y_{t-12} = \nu_t + \omega_t - \omega_{t-12}$$

Este modelo, es claramente estacionario y su ACF tendrá un pico solamente en el rezago 12. En general, diferenciación estacional puede ser indicada cuando el ACF decrece lentamente en múltiplos de algún ciclo s, pero es despreciable entre periodos. Así pues, ***diferenciación estacional de orden D*** se define como

$$\nabla_s^D\, Y_t = (1-B^s)^D Y_t, \tag{83}$$

donde $D = 1,2,\ldots$. Típicamente, $D = 1$ es suficiente para obtener estcionaridad estacional.

De manera similar a los modelos ARIMA, en los modelos multiplicativos también se puede incorporar diferenciación para obtener los ***modelos ARMA integrados multiples*** dado por

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d\, Y_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)\omega_t, \tag{84}$$

y denotado por ARIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$. Los operadores de diferenciación están dados por $\nabla^d = (1-B)^d$ y $\nabla_s^D = (1-B^s)^D$.

Ejemplo 7. *El siguiente modelo a menudo provee una buena representación para series económicas estacionales y no estacionarias. El modelo ARIMA$(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ en donde las fluctuaciones cíclicas ocurren cada 12 " meses ", está dado por*

$$(1-B^{12})(1-B)\,Y_t = (1+\Theta_1 B^{12})(1+\theta_1 B)\omega_t, \tag{85}$$

que a su ves expandiendo también se puede escribir como

$$(1 - B - B^{12} + B^{13})\,Y_t = (1 + \theta B + \Theta B^{12} + \Theta\theta B^{13})\,\omega_t$$

ó en forma de ecuación de diferencias como

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + \omega_t + \theta\omega_{t-1} + \Theta\omega_{t-12} + \Theta\theta\omega_{t-13}.$$