SERIES DE TIEMPO

TAREA 1.

FECHA DE ENTREGA: 28 DE FEBRERO DE 2025

1) Considérese el modelo autorregresivo $\{X_t\}$ dado por la ecuación estocástica

$$X_t = \phi\, X_{t-1} + \sqrt{1-\phi^2}\,\varepsilon_t, \tag{1}$$

donde $0 < \phi < 1$ y $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

1. ¿ Es $\mathrm{N}(0,1)$ una medida invariante para este proceso de Markov?
2. ¿Es $\{X_t\}$ estrictamente estacionario? ¿Cuál es la ley de sus distribuciones finito dimensionales?
3. ¿Es el proceso reversible en el tiempo?
4. Demuestra que la función de auto-correlación para este modelo es, $\rho(h) = \phi^h$, para $h = 1, 2, \ldots$
5. Simula varias (≈100) realizaciones de tamaño n (≈200 o más). ¿Cómo verificarías la propiedad de estacionariedad fuerte? Hint: ¿Cómo analizarías empíricamente que las distribuciones $\mathcal{L}\{X_{25}, \ldots, X_{75}\} = \mathcal{L}\{X_{125}, \ldots, X_{175}\}$ son similares?

2) Muestra que el filtro lineal $\{a_j\}$ pasa un polinomio de orden k sin distorsión. Es decir que

$$m_t = \sum_j a_j m_{t-j}$$

para todo polinomio de grado $m_t = c_0 + c_1 t + \cdots + c_1 t^k$, si y solo si

$$\begin{cases} \sum_j a_j = 1, & \text{y} \\ \sum_j j^r\, a_j = 0, & \text{para} r = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

4) Usando el problema anterior deduce que el promedio móvil de Spencer definido en clase pasa un polinomio de orden tres sin distorsión.

5) Considérese el proceso

$$X_t = \beta_0 + \beta_1\, t + \omega_t,$$

donde β_0, β_1 son constantes fijas y $\{\omega_t\}$ son variables independientes con media cero y varianza fija σ^2.

1. Demuestra que $\{X_t\}$ no es estacionario.
2. Demuestra que $\{\nabla X_t\}$ es estacionario.

6) Sea ω_t un proceso de ruido blanco. Determine cuales de los siguientes modelos son estacionarios

1. $Y_t = \omega_t\, \omega_{t-1}$
2. $Y_t = e^{\omega_t}\, \omega_{t-1}$
3. $Y_t = \omega_{t-1} + 2\,\omega_t + \omega_{t+1}$
4. $Y_t = \nabla^d\, \omega_t$.

De ser el caso, de que tipo de estacionariedad se puede hablar.

8) Ajusta dos polinomio de orden 1 y 2 a la serie de datos con los niveles del lago Huron (B& D). ¿Qué modelo dirías que se ajusta mejor? Justifica tus conclusiones.

9) Sea $\{Y_t\}$ el proceso modelado por

$$Y_t = \sqrt{\frac{Y_{t-1}^2 + \nu\beta^2}{\nu+1}}\,\xi_t, \quad \xi_t \sim \mathrm{St}\left(0, 1, \nu+1\right), \tag{2}$$

donde $\beta > 0$ y $\nu \in \mathbb{N}$. Claramente el proceso dado por (2) es un proceso de Markov.

1. Demostrar que si asumimos una distribución inicial a dicho modelo dada por $\mathrm{St}\left(y_t; 0, \beta^2, \nu\right)$, entonces el proceso $\{Y_t\}$ es fuertemente estacionario.
2. En que casos, dicho modelo se puede decir que es débilmente estacionario.
3. Simula una serie de dicho modelo, con $\beta = 1$ y $\nu = 5$. ¿Qué puedes decir acerca del correlograma de dicho modelo?
4. ¿Qué sucede con la estacionariedad débil cuando $\nu = 1$?

Nota:

$$\mathrm{St}\left(y_t; 0, \beta^2, \nu\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}\,\beta}\left(1 + \frac{y_t^2}{\nu\beta^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$