



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SIMULACIÓN DE PROCESOS
COALESCENTES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
APLICADAS**

P R E S E N T A:

ENRIQUE MOCTEZUMA GONZÁLEZ

DRA. SANDRA PALAU CALDERÓN

CIUDAD UNIVERSITARIA, 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos de alumno

Moctezuma
González
Enrique
55 31 06 55 35
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas Aplicadas
315019344

2. Datos del tutor

Dra.
Sandra
Palau
Calderón

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Airam Aseret
Blancas
Benítez

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Arnaud Charles Leo
Jegousse

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Adrián
González Casanova
Soberón

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Josué Manik
Nava
Sedeño

7. Datos del trabajo escrito

Simulación de procesos coalescentes
pp. 80
2022

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, Ana y Roberto, y a mis hermanos, Rodrigo y Mariana, por su amor y apoyo incondicional.

Gracias a mi abuela Elena por ser el ejemplo más grande, y a Jorge, Tita y Tito, a quienes todos los días recuerdo con mucho cariño. A Jorge, Lorena, Cristy, Chela, Paty, Gerardo, Pepe, Eduardo y Roxana. A Luis Felipe, Ana Clau, Eduardo, Roxana, Pedro; a Juan Pa, por ser modelo de perseverancia, y a mis primos científicos Pablo, por motivarme a estudiar esta hermosa carrera, y Fran, por ser un gran compañero de facultad.

A Pablo, por sus valiosísimos consejos, y a Pily, por los años de gran amistad. A mis amigos, sin quienes mi vida universitaria jamás hubiera sido lo mismo, Ana Vic, Mayté, Ulises, Edrei, Larissa, Alam, Luis, Puma, Roy, Ana, Cerri, Dani, Pato, Sara, Sofi y Zama (lista no exhaustiva), compañeros de anécdotas, carcajadas, viajes y de tantas tardes de estudio.

A mis estupendos asesores Sandra Palau y Adrián González Casanova por su completa disposición, paciencia, guía y por hacer de esta etapa una de las más interesantes y divertidas de mi carrera. A mis sinodales Airam Blancas, Arnaud Jegousse y Manik Nava por todo su apoyo durante la misma.

La situación para la generación 2018 no fue fácil: ingresamos a la facultad con el sismo del 2017 y egresamos con la pandemia del COVID-19. Sin embargo, la carrera fue en todo momento inmensamente disfrutable gracias a la dedicación y a la enorme calidad humana y académica de mis excelentes profesores, entre los que se encuentran Sergio López, Alberto Saldaña, Gonzalo Pérez, Pierre Bayard, Ramón Plaza, Clara Garza, Luis Fernando López, Alejandro Santoyo, Sergio Macías, Ruth Fuentes, Miguel Ballesteros, Claudia López, Marco Montes de Oca, Héctor Méndez, Vinicio Gómez, Úrsula Iturrarán y Alejandro Zárate.

Al Ph.D. Richard Alejandro Arratia por facilitarme su tesis doctoral [1], fundamental para la realización de este trabajo.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM: IA103220, Procesos de ramificación multitypo. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Finalmente, gracias a la UNAM por mostrarme la diversidad en su máxima expresión.

Índice

Introducción	1
1 La caminata aleatoria y el movimiento browniano	3
1.1 Conceptos preliminares	3
1.2 El teorema de Donsker	6
1.3 Un escalamiento alternativo	9
2 Coalescencia de procesos	11
2.1 Definición de proceso coalescente numerable	11
2.2 Tiempo de última coalescencia	12
2.3 El coalescente de Kingman	13
3 Movimientos brownianos coalescentes	17
3.1 Construcción de las caminatas aleatorias coalescentes en el plano	17
3.2 Convergencia a la web browniana	19
3.3 El flujo browniano de Arratia en un intervalo	21
3.3.1 Densidad del tiempo de última coalescencia	23
3.3.2 Finitud e integrabilidad	26
3.3.3 La ecuación del calor	28
4 Procesos de Itô: Intersección de trayectorias	33
4.1 Ecuaciones diferenciales estocásticas	33
4.2 El método de aproximación de Euler-Maruyama	38
4.3 El movimiento browniano geométrico	40
4.4 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck	48
4.5 La difusión de Wright-Fisher	53
4.6 Los coalescentes	58
5 Movimientos brownianos con banco de semillas	63
5.1 Definición del proceso	63
5.2 Simulación del MBBS	65
5.3 La regla de coalescencia	70
Conclusión	77
Bibliografía	79

Introducción

Muchos fenómenos demográficos, entre los que se incluyen la migración, extinción y recolonización pueden ser estudiados mediante la coalescencia. La idea básica del coalescente es rastrear la ancestría de un grupo de individuos enfocándose particularmente en los tiempos en los que dos de ellos surgieron de otro, llamado ancestro [2]. El genetista estadounidense Sewall Wright (1889 – 1988) y el estadístico inglés Ronald A. Fisher (1890 – 1962) establecieron muchas de las bases de lo que se convertiría en la genética de poblaciones. Wright y Fisher sabían que era necesario tener una descripción matemática de la aleatoriedad en las fluctuaciones de los alelos debidas al muestreo en una población finita y propusieron el modelo de Wright-Fisher. Este modelo tiene la particularidad de considerar que las generaciones de individuos no se traslapan, lo cual no es realista para ciertas especies, como los seres humanos. Es por ello que el matemático australiano Patrick Moran (1917 – 1988) propuso a su vez el modelo de Moran, en el cual un solo individuo cambia en cada tiempo (ver, por ejemplo, [3]). Posteriormente, Kingman [4] probó que, bajo un escalamiento adecuado, el modelo de Wright-Fisher converge a un objeto que él llamó el coalescente (ver la Sección 2.3). Con el tiempo se comenzó a estudiar la coalescencia no únicamente con fines biológicos, sino también como un objeto meramente matemático, como es el caso del flujo browniano de Arratia [1] y la web browniana de Fontes et al. [5]. Nos centraremos en estudiar la coalescencia matemáticamente haciendo énfasis en su implementación computacional.

En las últimas décadas la computación se ha vuelto indispensable no únicamente en lo referente al análisis de datos reales, sino también en la resolución de problemas de naturaleza teórica o aquellos que representan una intersección entre las matemáticas puras y las aplicadas. Particularmente, los procesos estocásticos son un área de las matemáticas con una gran utilidad práctica y con una base teórica muy rigurosa. El objetivo de esta tesis es explorar las conexiones que existen entre diversas áreas de las matemáticas y la teoría de coalescencia de procesos estocásticos, así como construir algoritmos de simulación que permitan visualizar los coalescentes y realizar algunos cálculos numéricos.

En el primer capítulo estableceremos las bases necesarias para poder llevar a cabo la simulación de un proceso coalescente browniano. En particular enunciaremos las definiciones de caminata aleatoria y movimiento browniano. Trabajaremos con el teorema de Donsker, el cual es un resultado de convergencia de la caminata aleatoria estándar al movimiento browniano, y explicaremos una forma alternativa de simular a este último usando un reescalamiento que facilitará la programación de los algoritmos en las secciones subsecuentes.

En el segundo capítulo definiremos la coalescencia en general y el tiempo de última coa-

lescencia de un proceso como variable aleatoria, con la cual trabajaremos a lo largo de la tesis en cada ejemplo que desarrollemos. Expondremos un primer ejemplo de proceso coalescente, el coalescente de Kingman, y lo programaremos.

En el tercer capítulo estudiaremos los movimientos brownianos coalescentes a partir de caminatas aleatorias, construyendo dos algoritmos que nos permitan simular el flujo browniano de Arratia y la web browniana de Fontes et al. Enunciaremos algunos resultados de convergencia de caminatas aleatorias coalescentes a estos objetos y obtendremos la función de densidad del tiempo de última coalescencia del flujo browniano restringido a un conjunto compacto. Finalmente, exhibiremos una primera relación entre la variable aleatoria del tiempo de última coalescencia y la ecuación diferencial parcial del calor.

En el cuarto capítulo extenderemos mucho de lo desarrollado hasta el Capítulo 3 a trayectorias que no son movimientos brownianos estándar, sino soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello resolveremos numéricamente (y analíticamente, cuando sea posible) algunas de las ecuaciones de este tipo más conocidas, encontraremos la densidad del tiempo de intersección de dos trayectorias y simularemos el coalescente asociado a cada proceso.

En el último capítulo explicaremos el banco de semillas y simularemos movimientos brownianos coalescentes con esta propiedad para visualizar sus trayectorias y encontrar la densidad empírica del tiempo de última coalescencia.

Además del desarrollo de esta parte escrita, la tesis cuenta con un repositorio en línea al cual se puede acceder a través del enlace siguiente:

<https://github.com/EMoctezuma/Tesis>

Todos los archivos de tipo `.py` referenciados en el texto son independientes entre sí y se encuentran en dicho repositorio. Los códigos pueden diferir significativamente de los pseudocódigos que mostraremos en la parte escrita, pues el objetivo de estos últimos es dar una idea general del proceso de simulación. En consecuencia pueden cambiar el número de líneas, el nombre de las variables, la cantidad de variables (pues en los pseudocódigos únicamente se encuentran aquellas que son imprescindibles), las variables de salida, entre otros aspectos. Además, en los pseudocódigos no nos adentraremos en los detalles de los procesos de graficación, los cuales muchas veces son complejos.

El lenguaje de programación utilizado es Python 3 gracias a su versatilidad, a su amplio uso en simulación y análisis numérico, a la enorme cantidad de material y documentación disponibles y, por supuesto, a que es *software* libre. Por esta razón los pseudocódigos, aunque están escritos en la forma más genérica posible, tienen la sintaxis, indentación y manejo de los índices de este lenguaje. En particular hicimos uso de las librerías NumPy, Matplotlib, SciPy, SymPy, Seaborn y Pandas, y de los módulos Math, Collections y Sys.

En varios códigos imprimimos el número de iteración en la consola para tener control sobre los tiempos de ejecución, sin perder de vista que ello ralentiza ligeramente los algoritmos. Esto puede ser desactivado comentando las líneas de tipo `print()` correspondientes.

Capítulo 1

La caminata aleatoria y el movimiento browniano

La caminata aleatoria y el movimiento browniano son dos de los modelos más importantes dentro de la teoría de la probabilidad y se encuentran profundamente relacionados, como lo puntualizaremos en la Sección 1.2. La caminata aleatoria es un proceso que fue inicialmente estudiado por los matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601 – 1665) y Blaise Pascal (1623 – 1662) para resolver el problema de *La ruina del jugador* (referirse a [6]), que consistió en determinar las condiciones para que un juego de apuestas fuera justo. El movimiento browniano fue introducido por Robert Brown (1773–1858) al observar el movimiento aleatorio de partículas de polen en un líquido y fue formalizado posteriormente por Albert Einstein y Norbert Wiener (1894 – 1964), de quien este proceso toma también el nombre.

1.1 Conceptos preliminares

La principal referencia para esta sección es [7]. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición 1.1.1. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $(X_t)_{t \in T}$ (que por simplicidad se suele denotar como X_t) donde T es un conjunto llamado espacio parametral. Dichas variables aleatorias toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

Generalmente los elementos de T representan el tiempo ($T = [0, \infty)$ ó $T = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$). Es por ello que los procesos estocásticos son ampliamente utilizados en modelos que involucran a éste como variable independiente.

Definición 1.1.2. Dada una σ -álgebra \mathcal{F} , una filtración a tiempo continuo es una colección no numerable de sub σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ cuando $0 \leq s \leq t$. La filtración natural o canónica de un proceso a tiempo continuo X_t es la colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ dadas por $\mathcal{F}_t = \sigma \{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}$; es decir, \mathcal{F}_t es la mínima σ -álgebra que hace que cada una de las variables X_s con $s \in [0, t]$ sea medible.

A \mathcal{F}_t se le denomina la historia del proceso al tiempo t .

Definición 1.1.3. Se dice que un proceso estocástico X_t es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para todo $t \geq 0$, X_t es \mathcal{F}_t -medible.

Definición 1.1.4. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es un tiempo de paro respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$ se cumple que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Definición 1.1.5. Un proceso estocástico X_t es una martingala continua respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (o, equivalentemente, una \mathcal{F}_t -martingala) si cumple que

- i) X_t es integrable para todo $t \geq 0$.
- ii) X_t es \mathcal{F}_t -medible.
- iii) Si $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$.

Decimos que es submartingala si se cumplen i) y ii) y además $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$. Análogamente, es supermartingala si se cumplen i) y ii) y $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$.

Definición 1.1.6. Un proceso adaptado y continuo por la derecha X_t es una \mathcal{F}_t -martingala local si existe una sucesión de tiempos de paro τ_n , $n \geq 1$ tal que se cumple

- i) $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es creciente.
- ii) $\tau_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente (c.s.).
- iii) Para cada n , el proceso $X^{\tau_n} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_n > 0\}}$ es una martingala cuadrado integrable (ver Definición 4.1.1).

Definición 1.1.7. Consideremos la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y supongamos que $\mathbb{P}(\xi = 1) = p$ y $\mathbb{P}(\xi = -1) = q$ con $p + q = 1$. Una caminata aleatoria simple X_n es un proceso estocástico con valores en \mathbb{Z} definido como

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1,$$

donde sin pérdida de generalidad suponemos que $X_0 = 0$.

Es importante mencionar que la caminata aleatoria es un proceso de Markov, pues la posición en la que se encuentra al tiempo $n + 1$ depende únicamente de su posición al tiempo n . Las siguientes son propiedades básicas de la caminata aleatoria.

Proposición 1.1.1. Sea X_n la caminata aleatoria antes definida. Para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

- i) $\mathbb{E}(X_n) = n(p - q)$.
- ii) $\text{Var}(X_n) = 4npq$.

Demostración. i) Usando la linealidad de la esperanza,

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k\right) = 0 + n \mathbb{E}(\xi_k) = n(p - q).$$

ii) Observemos que $\mathbb{E}(\xi_k^2) = (-1)^2q + 1^2p = 1$. Entonces $\text{Var}(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k^2) - \mathbb{E}(\xi_k)^2 = 1 - (p - q)^2 = 4pq$. Así, por independencia,

$$\text{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(\xi_k) = n \text{Var}(\xi_k) = 4npq.$$

■

Si $p = q = 1/2$, decimos que la caminata aleatoria es simétrica. En tal caso, obtenemos que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ y $\text{Var}(X_n) = n$.

Definición 1.1.8. Un movimiento browniano o proceso de Wiener unidimensional con parámetro de varianza σ^2 es un proceso estocástico W_t con valores en \mathbb{R} que satisface:

- i) $W_0 = 0$ c.s.
- ii) Incrementos independientes: Para cualesquiera $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$, las variables aleatorias $W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2}, \dots, W_{t_n} - W_{s_n}$ son independientes.
- iii) Incrementos estacionarios: Para cada $s < t$, la variable aleatoria $W_t - W_s$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$.
- iv) Continuidad de las trayectorias: La función $t \mapsto W_t$ es una función continua de t .

Si $\sigma^2 = 1$ en la definición anterior decimos que el movimiento browniano W_t es estándar.

Un movimiento browniano que comienza en x es aquel proceso que cumple ii), iii), iv) y la condición inicial $W_0 = x$. Si W_t es un movimiento browniano que comienza en 0, entonces $B_t^x = x + W_t$ es un movimiento browniano que comienza en x .

Proposición 1.1.2. *El movimiento browniano W_t tiene las siguientes propiedades:*

- i) *Es una martingala continua respecto a la filtración natural.*
- ii) *Su trayectoria no es diferenciable en ningún punto c.s.*
- iii) *Cumple la propiedad de Markov: Si $s < t$, entonces*

$$\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t \mid W_s).$$

Para la demostración de la proposición ver [7, Proposiciones 8.2, 8.3 y 8.6].

Proposición 1.1.3. (Principio de reflexión). *Sea B_t^x un movimiento browniano que comienza en x y sea $\omega > x$. Para todo $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(B_s^x \geq \omega \text{ para alguna } s \in [0, t]) = 2\mathbb{P}(B_t^x \geq \omega).$$

Demostración. Sea $\tau = \inf \{t \geq 0 \mid B_t^x = \omega\}$. Entonces

$$\mathbb{P}(B_s^x \geq \omega \text{ para alguna } s \in [0, t]) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}(\tau < t) + \mathbb{P}(\tau = 0) = \mathbb{P}(\tau < t),$$

pues $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t^x \geq \omega) &= \mathbb{P}(B_t^x \geq \omega \mid \tau \leq t) \mathbb{P}(\tau \leq t) \\ &= \mathbb{P}(B_t^x - \omega \geq 0 \mid \tau < t) \mathbb{P}(\tau < t) \\ &= \mathbb{P}(B_t^x - B_\tau^x \geq 0 \mid \tau < t) \mathbb{P}(\tau < t). \end{aligned}$$

La distribución de la variable aleatoria $B_t^x - B_\tau^x = x + B_t - (x + B_\tau) = B_t - B_\tau$ es, por la propiedad de incrementos estacionarios, $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t - \tau))$. Así, por la simetría de la distribución normal $\mathbb{P}(B_t^x - B_\tau^x \geq 0 \mid \tau < t) = 1/2$, de donde obtenemos que $\mathbb{P}(\tau < t) = 2\mathbb{P}(B_t^x \geq \omega)$. ■

El principio de reflexión será muy utilizado a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.9. Sea $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$. La variación cuadrática de f hasta el tiempo t es

$$\langle f, f \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(f(t_{j+1}) - f(t_j) \right)^2,$$

donde $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ es una partición de $[0, t]$ y $\|\Pi\|$, llamado norma de la partición, denota el largo del subintervalo más grande dado por puntos contiguos dentro de la misma.

Proposición 1.1.4. Sea W_t un movimiento browniano. Entonces $\langle W, W \rangle_t = t$ para todo $t \geq 0$ c.s.

La demostración de esta proposición puede consultarse en [8, Teorema 3.4.3]. En particular, la media y la varianza están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right)^2 \right) &= t_{j+1} - t_j, \\ \text{Var} \left(\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right)^2 \right) &= 2(t_{j+1} - t_j)^2. \end{aligned}$$

Como la varianza tiende a cero para intervalos muy pequeños y una variable aleatoria es constante cuando su varianza es nula, podemos realizar la siguiente aproximación cuando el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ es pequeño:

$$\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right)^2 \approx t_{j+1} - t_j.$$

1.2 El teorema de Donsker

Como lo mencionamos, el movimiento browniano es un proceso a tiempo continuo, por lo que para poder simularlo necesitamos hacer una discretización adecuada del tiempo y del espacio en el que se mueve: los números reales. Las caminatas aleatorias discretas son procesos que otorgan buenos resultados de convergencia al movimiento browniano y, por ende, son una excelente forma de aproximación. A continuación mencionaremos un teorema de convergencia esencial para la simulación de movimientos brownianos vía caminatas aleatorias.

Teorema 1.2.1. (Teorema de Donsker¹). Consideremos una sucesión $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, centradas (esto es, $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ para toda k) y tales que $\mathbb{E}(\xi_k^2) = \sigma^2 < \infty$. Fijemos $S_0 = 0$ y tomemos la caminata aleatoria

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1.$$

Si $[x]$ representa la parte entera de $x \in \mathbb{R}$, definimos el proceso continuo X_t^n , $t \geq 0$ como

$$X_t^n = (\sigma\sqrt{n})^{-1} \left(S_{[nt]} + (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1} \right).$$

Entonces $(X_t^n)_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (W_t)_{t \geq 0}$ conforme $n \rightarrow \infty$.

¹Recibe el nombre del matemático estadounidense Monroe D. Donsker (1924 – 1991).

En particular, si $\sigma^2 = 1$ el límite en distribución es un movimiento browniano estándar.

La demostración del teorema requiere hacer uso de varios resultados más, por lo que no resulta práctico escribirla, pero puede consultarse en [9, Teorema 1.9]. Nos centraremos en analizar la esperanza y la varianza de X_t^n .

El teorema puede interpretarse como sigue: si tomamos caminatas aleatorias simétricas independientes e idénticamente distribuidas ξ_i con $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1/2$, entonces $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ y $\text{Var}(\xi_i) = 1$. Para la convergencia en distribución al movimiento browniano tenemos que hacer un escalamiento en el tiempo y en el espacio: si la variable temporal se modifica como $1/n$, entonces la longitud del salto debe ser $1/\sqrt{n}$. Al definir

$$X_t^n := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}},$$

usando la Proposición 1.1.1 obtenemos que

$$\mathbb{E}(X_t^n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(S_{\lfloor nt \rfloor}) + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t^n) &= \text{Var}\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 0 - \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_{\lfloor nt \rfloor}^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E}(S_{\lfloor nt \rfloor} (nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}) + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)^2}{n} \mathbb{E}(\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}^2) \\ &= \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} + \left(\frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}}\right)^2. \end{aligned}$$

De lo anterior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} + \left(\frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) = t,$$

pues el primer término dentro del límite tiende a t y el segundo a 0 conforme n crece. Con esto $\text{Var}(X_t^n) \rightarrow t$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Por tanto, la sucesión considerada bajo el escalamiento conserva la esperanza y la varianza del movimiento browniano. En el enunciado del teorema no se especifica la distribución de las variables aleatorias ξ_i , aunque por practicidad se suelen tomar Bernoulli(1/2).² A esta propiedad se le llama principio de invarianza de Donsker. Por otro lado, al Teorema 1.2.1 se le conoce también como teorema del límite central funcional.

Hemos construido de esta manera una forma de simular numéricamente movimientos brownianos, cuya precisión dependerá del número de pasos que ejecute la caminata. Si lo que buscamos es simular un movimiento browniano estándar en el intervalo temporal $[0, 1]$, basta con tomar

$$X_t^n = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

²Para producir números pseudoaleatorios Bernoulli(p), generamos $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y consideramos que la realización corresponde a un éxito si $u \leq p$ y a un fracaso si $u > p$.

puesto que $\left| (nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right| \leq 1$ para todo $t \in [0, 1]$ y, en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

En la Figura 1.1 se muestran dos caminatas aleatorias.³ La trayectoria verde aproxima más fielmente a la de un movimiento browniano, que es la conclusión del teorema de Donsker.

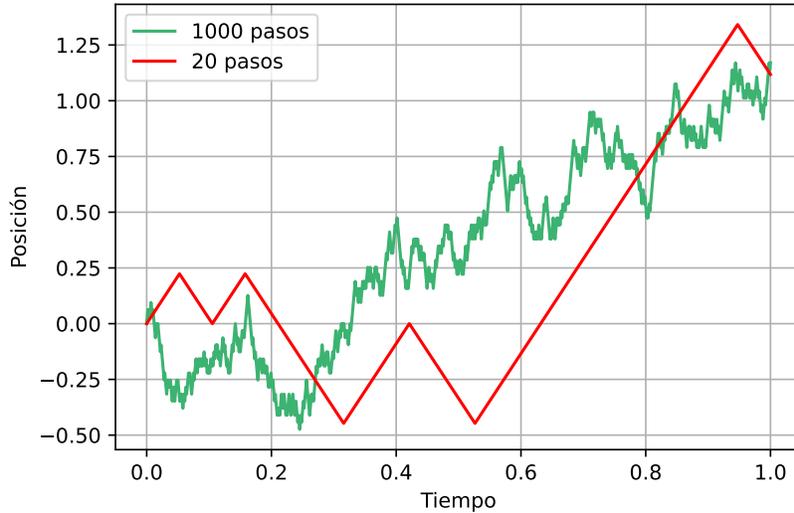


Figura 1.1: Caminatas aleatorias.

Pseudocódigo 1 Movimiento browniano: escalamiento usual

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos.

Inicializar: $\text{valores} := \{0\}$; $\text{valor} := 0$; particion : particion del intervalo $[0, 1]$ con $n + 1$ elementos.

for $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ **do**

$u \sim \mathcal{U}(0, 1)$

if $u \leq 1/2$ **then**

$\text{valor} := \text{valor} - 1/\sqrt{n}$

else

$\text{valor} := \text{valor} + 1/\sqrt{n}$

Agregar valor a valores

Graficar particion contra valores

Salida: valores

³Referirse al archivo `mb_esc_usual.py`.

1.3 Un escalamiento alternativo

Supongamos que, en lugar de simular un movimiento browniano en $[0, 1]$, queremos hacerlo en el intervalo $[0, m]$ tomando exactamente m pasos. Veremos que hacer tender n a infinito en el escalamiento (1.1) es equivalente a hacer tender m a infinito bajo esta propuesta. Esto nos será útil principalmente en el Capítulo 5, pues nos permitirá comparar valores de caminatas aleatorias evitando que pertenezcan al conjunto $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Sin embargo, las propiedades cualitativas del movimiento browniano no cambiarán gracias al siguiente resultado:

Proposición 1.3.1. (Autosimilitud). *Supongamos que W_t es un movimiento browniano estándar. Si $a > 0$ y $Y_t = a^{-1/2} W_{at}$, entonces Y_t es un movimiento browniano estándar.*

Demostración. i) $Y_0 = 0$ c.s.:

$$Y_0 = a^{-1/2} W_{a \cdot 0} = 0 \text{ c.s.}$$

ii) Trayectorias continuas: El proceso W_t es un movimiento browniano estándar, por lo que sus trayectorias son continuas para todo $t \in [0, \infty)$. En particular, si $s = at$ el movimiento browniano es continuo en s . Como el producto de una función continua por un escalar es una función continua, el proceso Y_t tiene trayectorias continuas.

iii) Incrementos independientes: Sean $s, t \in [0, \infty)$ tales que $s \leq t$. Observemos que

$$Y_t - Y_s = a^{-1/2} W_{at} - a^{-1/2} W_{as} = a^{-1/2} (W_{at} - W_{as})$$

y, como W_t es un movimiento browniano estándar, $(W_{at} - W_{as}) \perp (W_{av} - W_{au})$ si $0 \leq u \leq v \leq s$. Entonces $a^{-1/2} (W_{at} - W_{as}) \perp a^{-1/2} (W_{av} - W_{au})$ y por tanto $(Y_t - Y_s) \perp (Y_v - Y_u)$. Es decir, el proceso Y_t tiene incrementos independientes.

iv) Incrementos estacionarios: Sean $t, s \in [0, \infty)$, $s \leq t$. Entonces $Y_t - Y_s = a^{-1/2} (W_{at} - W_{as})$, y nuevamente usando que W_t es un movimiento browniano estándar, $W_{at} - W_{as} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(at - as))$. Finalmente, utilizando las propiedades de la distribución normal,

$$a^{-1/2} (W_{at} - W_{as}) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{a} (at - as)\right) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(t - s)\right).$$

Es decir, $Y_t - Y_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$. ■

Empecemos por reescalar el tiempo como $t = ms$, $s \in [0, 1]$. Entonces $W_t = W_{ms}$ y por la Proposición 1.3.1, $W_{ms} = \sqrt{m} B_s$ donde B_s es un movimiento browniano estándar. Utilizando la igualdad (1.1) del teorema de Donsker,

$$W_{ms} \approx \sqrt{m} \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}},$$

y tomando $m = n$ obtenemos que $W_{ms} \approx S_{\lfloor nt \rfloor} = S_{\lfloor n^2 s \rfloor}$. Lo anterior significa que podemos simular un movimiento browniano tomando caminatas aleatorias con longitud de paso $\sqrt{2}$ y escalando el tiempo como m^2 , donde m es el número de pasos deseado. La razón de que el

1.3. UN ESCALAMIENTO ALTERNATIVO

tamaño de paso sea igual a $\sqrt{2}$ es que la distancia entre tiempos y valores espaciales contiguos es 1 bajo este escalamiento. A partir de ahora y a excepción de que indiquemos lo contrario, utilizaremos esta fórmula para simular movimientos brownianos estándar.

En la Figura 1.2 se muestra un movimiento browniano simulado utilizando la construcción de esta sección.⁴ Si bien es cierto que los números en los ejes son distintos, la trayectoria tiene un aspecto cualitativo muy similar al que se muestra en la Figura 1.1.

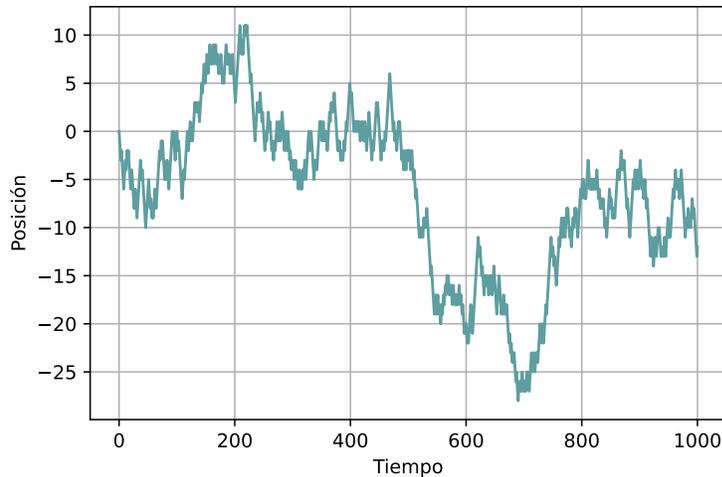


Figura 1.2: Caminata aleatoria con 1,000 pasos.

Pseudocódigo 2 Movimiento browniano: escalamiento alternativo

Nota: El índice -1 representa el último elemento de una lista (secuencia ordenada de datos).

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos (tiempo total).

Inicializar: $valores := \{0\}$; $valor := 0$; $tiempos := \{0, 1, \dots, n\}$.

```
for  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  do
   $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ 
  if  $u \leq 1/2$  then
     $valor := valores(-1) - 1$ 
  else
     $valor := valores(-1) + 1$ 
  Agregar  $valor$  a  $valores$ 
Graficar  $tiempos$  contra  $valores$ 
```

Salida: $valores$

⁴Referirse al archivo `mb_esc.alt.py`.

Capítulo 2

Coalescencia de procesos

A lo largo de los capítulos siguientes analizaremos el comportamiento de ciertas trayectorias de procesos estocásticos que chocan y coalescen, y estudiaremos algunas propiedades de sus coalescentes. Dedicaremos este capítulo a establecer las bases necesarias para ello. Comenzaremos por enunciar la definición de proceso coalescente (dada en [10]) y posteriormente la de tiempo de última coalescencia. Más adelante mostraremos que dicho tiempo no siempre es finito, pues depende de las características del proceso de Markov subyacente.

2.1 Definición de proceso coalescente numerable

Pensemos en un árbol genealógico. Al trabajar con él nos interesa tanto quiénes son los individuos que provienen de un mismo ancestro como los tiempos en los que nacieron. Como ocurre con la diferencia entre el modelo de Wright-Fisher y el de Moran, dichos tiempos pueden ser discretos o continuos. En este trabajo nos enfocaremos en estudiar coalescentes a tiempo continuo. La siguiente será, por consiguiente, la definición en la cual nos basaremos para la construcción de todos los algoritmos que presentaremos.

Definición 2.1.1. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y denotemos como $C[t_0]$ al conjunto de funciones continuas de $[t_0, \infty)$ en \mathbb{R}^n . Definamos el conjunto

$$\Pi = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} C[t_0] \times \{t_0\},$$

donde $(\gamma, t_0) \in \Pi$ representa una trayectoria γ en \mathbb{R}^n que comienza en $(\gamma(t_0), t_0)$. Consideremos un conjunto de trayectorias continuas real valuadas $(\gamma_j, s_j)_{j \geq 1}$ en Π . De este conjunto de trayectorias en principio independientes entre sí, definimos el conjunto ordenado de trayectorias coalescentes $(\gamma_j^c, s_j)_{j \geq 1}$ en Π inductivamente utilizando la siguiente regla de coalescencia. Sea $\gamma_1^c = \gamma_1$. Para $j > 1$, establezcamos

$$\tau_j = \inf \left\{ t \geq s_j \mid \gamma_j(t) \in \left\{ \gamma_1^c(t), \gamma_2^c(t), \dots, \gamma_{j-1}^c(t) \right\} \right\}$$

con la convención de que $\inf \{\emptyset\} = \infty$. A τ_j lo llamaremos tiempo de coalescencia de la j -ésima trayectoria. Tomemos

$$I_j = \min \left\{ i \in \{1, 2, \dots, j-1\} \mid \gamma_j(\tau_j) = \gamma_i^c(\tau_j) \right\} \text{ si } \tau_j < \infty.$$

Para $t \geq s_j$, definamos

$$\gamma_j^c(t) = \begin{cases} \gamma_j(t), & \text{si } t < \tau_j, \\ \gamma_{I_j}^c(t), & \text{si } t \geq \tau_j. \end{cases}$$

La definición anterior nos dice que si dos trayectorias $(\gamma_i^c(t), s_i)_{t \geq s_i}$ y $(\gamma_k^c(t), s_k)_{t \geq s_k}$ con $i \neq k$ se intersecan en cierto tiempo, entonces seguirán la trayectoria con la etiqueta más pequeña a partir del tiempo de coalescencia. Notemos que no se hace referencia al movimiento browniano estándar ni a las caminatas aleatorias simétricas, por lo que es válida para otro tipo de trayectorias.

2.2 Tiempo de última coalescencia

Supongamos que comenzamos con n caminatas aleatorias simétricas que parten de un segmento de recta y observamos los tiempos de coalescencia ordenados $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n-1)}$, donde los subíndices entre paréntesis denotan a los estadísticos de orden. Al trabajar con estos procesos que son discretos puede suceder que $t_j = t_k$ para $j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, con $j \neq k$; sin embargo, el valor de $t_{(n-1)}$ es único.

Pensamos al tiempo de última coalescencia como el número $t_{(n-1)}$; es decir, el máximo de todos los tiempos de coalescencia o, dicho de otra manera, el mínimo tiempo para el cual se observa una única caminata aleatoria. Si $W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n$ son movimientos brownianos coalescentes, en el límite continuo dicho mínimo es en realidad un ínfimo:

$$t_{(n-1)} = \inf \left\{ t \in [0, \infty) \mid W_t^1 = W_t^2 = \dots = W_t^n \right\},$$

y las caminatas aleatorias son los movimientos brownianos coalescentes en cuestión (ver la Sección 3.3).

Para valores grandes del tiempo y para $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ aún puede ocurrir que $t_k = t_{k+1}$ bajo el reescalamiento de la Sección 1.3, pues realizamos una transformación del espacio continuo a un conjunto discreto de puntos y las caminatas comenzarán a chocar en la primera línea de nodos (al tiempo 1). Esto no ocurre bajo el escalamiento continuo usual ya que la probabilidad de que dos movimientos brownianos se intersequen en un tiempo previamente establecido es 0.

En general, podemos definir el tiempo de última coalescencia como sigue:

Definición 2.2.1. Consideremos una familia de trayectorias real valuadas como en la Definición 2.1.1. Definimos el tiempo de última coalescencia de un proceso coalescente como la variable aleatoria

$$\hat{\tau} = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \gamma_k(t) = \gamma_1^c(t) \quad \forall k \geq 1 \right\},$$

siempre que $\tau_k < \infty$ para todo $k > 1$.

La variable aleatoria anterior es un tiempo de paro respecto a la filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. En otras palabras, podemos determinar si al tiempo t todas las trayectorias siguen a $\gamma_1^c(t)$ únicamente observando el coalescente en el intervalo $[0, t]$. Notemos que si dos trayectorias no colisionan, entonces $\tau_k = \infty$ para algún k y $\hat{\tau}$ no está definida.

Interpretando las trayectorias como ramas de un árbol genealógico, el tiempo de última coalescencia representa el tiempo hasta el ancestro común en el árbol genealógico; es decir, el número de generaciones transcurridas desde el primer individuo de una población hasta el presente si el tiempo es discreto, o la longitud del intervalo de tiempo si es continuo.

El tiempo de última coalescencia no necesariamente es finito, pues depende de la ley que sigan las trayectorias del coalescente en cuestión y de la dimensión del espacio en el que vivan las condiciones iniciales. Por ejemplo, si consideramos infinitas caminatas que parten de un intervalo no acotado, nunca se encontrarán todas en el sentido casi seguro. Para trabajar con la Definición 2.2.1 consideraremos que las condiciones iniciales de las trayectorias yacen en segmentos de recta.

En la Figura 3.3 (Sección 3.3) se muestra un ejemplo de un proceso coalescente browniano a tiempo continuo junto con su tiempo de última coalescencia.

2.3 El coalescente de Kingman

A continuación definiremos el coalescente de Kingman y mostraremos un algoritmo para su simulación. Éste es uno de los procesos coalescentes más importantes y utilizados en genética de poblaciones. Las referencias para esta sección son [3] y [11].

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y denotemos por $[n]$ al conjunto de todas las particiones de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dada una partición $\pi \in [n]$ llamamos bloques a los elementos de π . Por ejemplo, si la partición es $\pi = \{\{1\}, \{5, 2\}, \{3, 4, 6\}\}$, entonces los bloques son $\{1\}$, $\{5, 2\}$ y $\{3, 4, 6\}$. Decimos que una partición π_0 sigue a otra partición $\pi_1 \in [n]$ si π_1 puede ser construida al unir exactamente dos bloques de π_0 , y a esto lo denotamos como $\pi_0 \succ \pi_1$. Por ejemplo, si $\pi_0 = \{\{1\}, \{5, 2\}, \{3, 4, 6\}\}$ y $\pi_1 = \{\{1, 5, 2\}, \{3, 4, 6\}\}$, entonces $\pi_1 \succ \pi_0$.

Definición 2.3.1. El proceso de conteo de bloques del coalescente de Kingman $|K_t|$, $t > 0$ es un proceso de Markov a tiempo continuo con valores en \mathbb{Z}^+ y caracterizado por las tasas de transición $\binom{n}{2}$ de n a $n - 1$. Todas las demás tasas son cero.

Por otro lado, podemos definir una cadena de Markov que tome valores en los bloques de $[n]$ en lugar de en \mathbb{Z}^+ . Esto es, en vez de contar el número de bloques, buscamos obtener la información de los individuos que han coalescido hasta un cierto tiempo t . Dos individuos estarán en el mismo bloque al tiempo t si y sólo si tienen un ancestro común antes de t .

Definición 2.3.2. El n -coalescente de Kingman (K_t) con distribución inicial $K_0 \in [n]$ es el proceso de Markov a tiempo continuo con valores en $[n]$ caracterizado por las tasas de transición siguientes: K_t va de π_0 a π_1 con tasa uno si π_1 sigue a π_0 y todas las demás son cero.

Para la simulación del coalescente tomaremos siempre la distribución inicial en la cual cada bloque contiene un solo individuo: $K_0 = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$.

Proposición 2.3.1. El tiempo esperado hasta el ancestro común más reciente (ACMR) en el n -coalescente de Kingman es

$$\mathbb{E}(\tau_{ACMR}[n]) = 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

donde $\tau_{ACMR}[n] := \inf \left\{ t > 0 \mid K_t = \{\{1, 2, \dots, n\}\} \right\}$.

Demostración. Definimos a cada uno de los tiempos de coalescencia ordenados $T_1 = \tau_{ACMR}[n]$, $T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = 0$ como la longitud del intervalo de tiempo de unión de dos bloques (ver Figura 2.1):

$$T_k = \sum_{m=k+1}^n t_m, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

donde t_{k+1}, \dots, t_n son los tiempos independientes de unión de dos bloques previos a T_k . La k -ésima variable t_k tiene distribución exponencial con parámetro $\binom{k}{2}$, pues después de cada coalescencia se reduce en una unidad el número de bloques restantes, por lo que al ocurrir $n - k$ coalescencias permanecen k bloques. Entonces

$$T_k = \sum_{m=k+1}^n \exp\left(\left(\binom{m}{2}\right)\right).$$

En particular,

$$\tau_{ACMR}[n] = T_1 = \sum_{m=2}^n \exp\left(\left(\binom{m}{2}\right)\right),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau_{ACMR}[n]) &= \mathbb{E}\left(\sum_{m=2}^n \exp\left(\left(\binom{m}{2}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{m=2}^n \mathbb{E}\left(\exp\left(\left(\binom{m}{2}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{m=2}^n \frac{1}{\binom{m}{2}} \\ &= 2 \sum_{m=2}^n \frac{1}{(m-1)m} \\ &= 2 \sum_{m=2}^n \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

■

Observación: $\mathbb{E}(\tau_{ACMR}[n]) \rightarrow 2$ conforme $n \rightarrow \infty$, pero $\mathbb{E}(t_2) = 1$. En palabras, la última unión de bloques toma, en promedio, la mitad del tiempo total hasta el ACMR para ocurrir.

A continuación mostramos una realización del coalescente de Kingman y el algoritmo creado para su simulación.¹ Éste es una modificación del que se encuentra en [3, Pág. 10]. El

¹Referirse al archivo `kingman.py`.

procedimiento consiste en reducir de uno en uno la longitud de π en cada iteración hasta que quede un único elemento, que es el que representa al ACMR. Nosotros fijamos a los individuos en sus posiciones iniciales y tomamos el punto medio entre los números i y j en cada iteración para homogeneizar la visualización de las figuras a lo largo del trabajo.

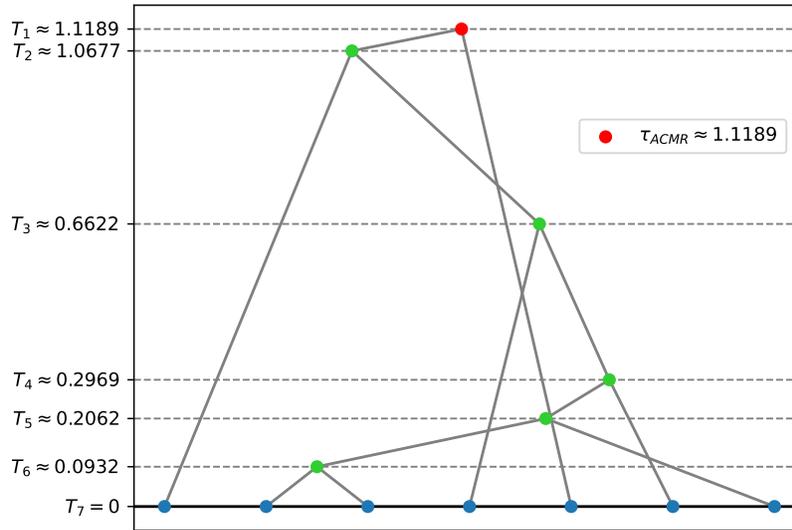


Figura 2.1: Realización del coalescente de Kingman con $n = 7$.

Pseudocódigo 3 Coalescente de Kingman

Notas: a) Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista. b) Numpy utiliza la esperanza de la distribución exponencial como parámetro de la misma.

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de generaciones.

Inicializar: $tiempos := \{\}$; $alturas$: lista con n ceros; $\pi := \{1, \dots, n\}$.

while $|\pi| > 1$ **do**

$tiempo \sim \exp\left(\binom{|\pi|}{2}^{-1}\right)$

Agregar $tiempo$ a $tiempos$

$altura := \sum tiempos$ (número)

Escoger dos números i y j de π sin reemplazo y eliminarlos de π

Borrar de $alturas$ a los elementos en las posiciones i y j

Agregar $altura$ a $alturas$

Agregar el punto medio entre i y j a π

Conectar a i y j con el punto $\left(\frac{i+j}{2}, altura\right)$

Salida: $tiempos$

Capítulo 3

Movimientos brownianos coalescentes

A continuación estudiaremos dos coalescentes principalmente: la web browniana de Fontes et al. [5] y el flujo browniano de Arratia [1]. Fontes et al. presentaron una generalización del proceso propuesto por Arratia, por lo que veremos el segundo objeto como un caso particular del primero. Las dos referencias anteriores y [12] son las principales para este capítulo.

3.1 Construcción de las caminatas aleatorias coalescentes en el plano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde una colección de movimientos brownianos independientes e idénticamente distribuidos W_t^j , $j \geq 1$ está definida. Sean $\mathcal{D} = \{(x_j, t_j) \mid j \geq 1\}$ un conjunto denso numerable en \mathbb{R}^2 y B^j la trayectoria browniana que comienza en x_j al tiempo t_j . Más precisamente,

$$B_t^j = x_j + W_{t-t_j}^j, \quad t \geq t_j.$$

Lo que haremos a continuación será aproximar a los movimientos brownianos anteriores mediante caminatas aleatorias representadas en el plano. Consideremos una retícula formada por los puntos espacio-temporales

$$\mathbb{Z}_{\text{par}}^2 := \left\{ (x, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + n \text{ es par} \right\},$$

la cual es un subconjunto de \mathbb{Z}^2 , conveniente para mantener la paridad, y tomemos las caminatas aleatorias simétricas cuyos puntos de inicio son los elementos de $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$; esto es, la caminata que comienza en $(x, n) \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ y que pasa a los estados $(x-1, n+1)$ ó $(x+1, n+1)$ con probabilidad $1/2$ en cada caso. Cuando dos caminatas se encuentren en un punto seguirán la misma trayectoria de acuerdo con la Definición 2.1.1. Una vez que colisionan dos caminatas al tiempo n y posición x , pueden tomar los estados $(x-1, n+1)$ ó $(x+1, n+1)$ conservando la equiprobabilidad. En la Figura 3.1 se ilustra esta construcción considerando solamente algunas trayectorias.¹

¹Referirse al archivo `caminatas_reticula.py`.

3.1. CONSTRUCCIÓN DE LAS CAMINATAS ALEATORIAS COALESCENTES EN EL PLANO

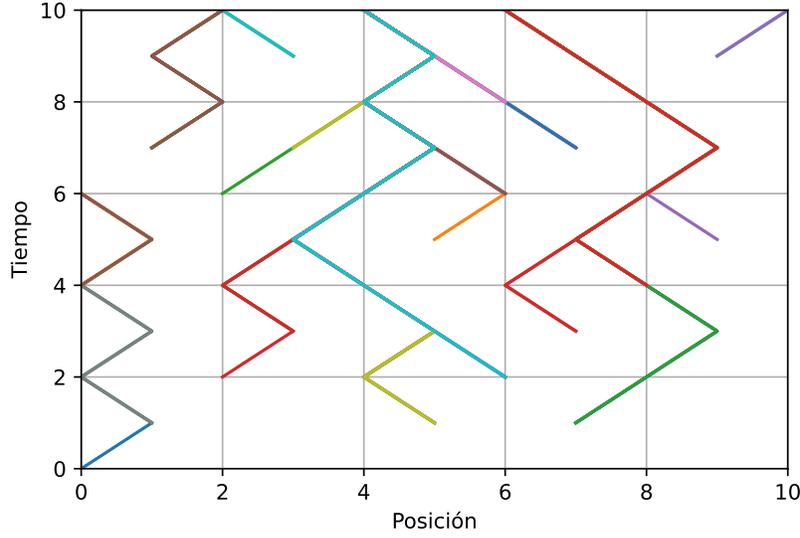


Figura 3.1: Caminatas aleatorias coalescentes que parten de puntos en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$.

Pseudocódigo 4 Caminatas aleatorias coalescentes en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$

Nota: Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista.

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de caminatas; $x \in \mathbb{Z}^+$: máx. del intervalo espacial; $t \in \mathbb{Z}^+$: máx. del intervalo temporal.

Inicializar: $\text{registro} := \{\}$ (será una lista de listas, o matriz).

for $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ **do**

$m := 1, j := 0$

while $m + j$ es impar **do**

Escoger una pareja (m, j) uniformemente en $\{0, 1, \dots, x\} \times \{0, 1, \dots, t\}$.

Comenzar la caminata caminata en el punto (m, j) y terminarla una vez que se alcance t . Utilizar el Pseudocódigo 2. Añadir datos tipo caracter en las primeras $j - 1$ entradas para que no sean tomados en cuenta.

for $k \in \{0, 1, \dots, |\text{caminata}|\}$ **do**

for $l \in \{0, 1, \dots, |\text{registro}|\}$ **do**

if $\text{caminata}(k) = \text{registro}(l, k)$ **then**

$\text{caminata}(s) := \text{registro}(l, s) \quad \forall s \in \{j + 1, j + 2, \dots, t\}$

break

Agregar la lista caminata a registro

Graficar la caminata actualizada. Mostrar hasta que $i = n$.

Salida: Figura

El algoritmo compara entrada a entrada cada caminata (justo después de su simulación) con las demás para verificar la coalescencia. Intuitivamente, al escalar el espacio y el tiempo como $1/\sqrt{n}$ y $1/n$ respectivamente, por la construcción del movimiento browniano a partir de caminatas aleatorias hecha en la Sección 1.2, las caminatas aleatorias en la retícula $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ deberían converger a movimientos brownianos que comienzan en todos los puntos de \mathbb{R}^2 . Este proceso límite es la *web browniana* de Fontes et al.

3.2 Convergencia a la web browniana

La web browniana es una variable aleatoria complicada, puesto que una cantidad no numerable de procesos deben ser contruidos de manera consistente. Para poder probar la convergencia en distribución de las caminatas aleatorias coalescentes que parten de los puntos en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ a la misma, se debe escoger un espacio adecuado que sea completo y separable para garantizar así la unicidad de este límite. Un espacio natural para la web browniana es el espacio de conjuntos compactos de trayectorias, de forma que ésta sea la cerradura casi segura del conjunto de movimientos brownianos coalescentes. Los detalles del siguiente desarrollo se encuentran en [5] y [12].

Comenzaremos por compactificar \mathbb{R}^2 modificando un poco la definición del espacio Π en la Sección 2.1. A este nuevo espacio lo denotaremos como $\bar{\mathbb{R}}^2$. Tomamos $t_0 \in [-\infty, \infty]$ y redefinimos $C[t_0]$ como el conjunto de funciones γ de $[t_0, \infty]$ en $[-\infty, \infty]$ tales que $\tanh(\gamma(t)) / (1 + |t|)$ es una función continua. Definimos

$$\Pi = \bigcup_{t_0 \in [-\infty, \infty]} C[t_0] \times \{t_0\},$$

donde $(\gamma, t_0) \in \Pi$ representa una trayectoria γ en $\bar{\mathbb{R}}^2$ que comienza en $(\gamma(t_0), t_0)$. Para $\gamma(t_0)$ en Π , denotamos como $\hat{\gamma}$ a la función que extiende a γ a $[-\infty, \infty]$ haciendo que $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t)$ para todo $t < t_0$.

Sea R_c^2 la completación de \mathbb{R}^2 bajo la métrica

$$\rho((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = |\tanh(t_1) - \tanh(t_2)| \vee \left| \frac{\tanh(x_1)}{1 + |t_1|} - \frac{\tanh(x_2)}{1 + |t_2|} \right|.$$

Esta distancia mapea las líneas $[-\infty, \infty] \times \{\infty\}$ y $[-\infty, \infty] \times \{-\infty\}$ a los puntos $(*, \infty)$ y $(*, -\infty)$ respectivamente e introduce a todas las funciones γ en un conjunto compacto (ver [12], Figura 2); esto es, una trayectoria $\pi \in R_c^2$ cuyo tiempo de inicio denotamos por $\sigma_\pi \in [-\infty, \infty]$ es un mapeo $\pi : [\sigma_\pi, \infty] \rightarrow [-\infty, \infty] \cup \{*\}$ tal que $\pi(\infty) = \pi(-\infty) = *$ y el mapeo $t \rightarrow (\pi(t), t)$ es continuo en (R_c^2, ρ) . Consideremos la métrica en R_c^2

$$d(\pi_1, \pi_2) = \left| \tanh(\sigma_{\pi_1}) - \tanh(\sigma_{\pi_2}) \right| \vee \sup_{t \geq \sigma_{\pi_1} \wedge \sigma_{\pi_2}} \left| \frac{\tanh(\pi_1)}{1 + |t|} - \frac{\tanh(\pi_2)}{1 + |t|} \right|,$$

y denotemos por \mathcal{H} al espacio de subconjuntos compactos de (Π, d) con la métrica de Hausdorff

$$d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2) = \sup_{\pi_1 \in K_1} \inf_{\pi_2 \in K_2} d(\pi_1, \pi_2) \vee \sup_{\pi_2 \in K_2} \inf_{\pi_1 \in K_1} d(\pi_1, \pi_2)$$

donde $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ es la σ -álgebra de Borel asociada con $d_{\mathcal{H}}$. El espacio $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ es un espacio métrico completo separable, como lo requerimos (ver [13, Proposición 8]).

Teorema 3.2.1. (Caracterización de la web browniana [5, Teorema 2.1]). *Existe una variable aleatoria $(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ -valuada \mathcal{W} llamada web browniana cuya distribución está determinada de manera única por las siguientes propiedades:*

- i) *Para cada $z \in \mathbb{R}^2$ determinista existe una única trayectoria $\pi_z \in \mathcal{W}_z$ c.s.*
- ii) *Para cada conjunto determinista de puntos $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{R}^2$, la colección*

$$\mathcal{C} := (\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \dots, \pi_{z_k})$$

está distribuida como movimientos brownianos coalescentes.

- iii) *Para cada conjunto denso numerable determinista $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{W} es la cerradura de $\{\pi_z \mid z \in \mathcal{D}\}$ en (Π, d) c.s.*

Con el siguiente teorema justificamos la convergencia sugerida en la sección anterior.

Teorema 3.2.2. (Convergencia a la web browniana [5, Teorema 7.1]). *Cada una de las colecciones de trayectorias provenientes de caminatas aleatorias reescaladas $Y_t^{(\delta)} = \delta Y_{\delta^{-2}t}$ en tiempo discreto converge en distribución a la web browniana estándar conforme $\delta \rightarrow 0$.*

Dada la equivalencia del reescalamiento alternativo propuesto en la Sección 1.3 con el que se menciona en el teorema podemos concluir que, en efecto, las caminatas aleatorias coalescentes definidas al principio del capítulo convergen en distribución a la web browniana conforme el número de puntos en la retícula $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ tiende a infinito.

El siguiente resultado es acerca de la densidad del conjunto de trayectorias de la web browniana que comienza en tiempo 0. Dada \mathcal{W} y un conjunto cerrado $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$, definimos el conjunto de puntos coalescentes como

$$\xi_t^{\mathcal{A}} := \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = \pi(t) \text{ para alguna } \pi \in \mathcal{W}(\mathcal{A} \times \{0\}) \right\}, \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

En otras palabras, $\xi_t^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de puntos en \mathbb{R} que se encuentran en alguna trayectoria en \mathcal{W} que comienza en \mathcal{A} al tiempo 0.

Proposición 3.2.1. (Densidad del conjunto de puntos de coalescencia). *Sea $\xi_*^{\mathbb{R}}$ el conjunto de puntos de coalescencia de la web browniana \mathcal{W} como definido en (3.1). Entonces, para todo $t > 0$ y $a < b$,*

$$\mathbb{E} \left(\left| \xi_t^{\mathbb{R}} \cap [a, b] \right| \right) = \frac{b - a}{\sqrt{\pi t}}.$$

El enunciado anterior nos habla de la propiedad de decaimiento desde el infinito, la cual significa que si comenzamos al tiempo 0 con una cantidad infinita no numerable de trayectorias en el intervalo $[a, b]$, inmediatamente después observaremos que quedan sólo una cantidad finita, pues $(b - a) / \sqrt{\pi t} < \infty$ para todo $t > 0$. Lo anterior implica que se producen una infinidad no numerable de coalescencias en el intervalo $[0, t]$ para todo $t > 0$. Para la demostración de este resultado referirse a [12, Proposición 2.7].

En la Figura 3.2 podemos visualizar una aproximación a la web browniana a través de caminatas aleatorias coalescentes como las de la Figura 3.1. El tiempo de simulación fue reducido para que se observen mejor las trayectorias y sus coalescencias.

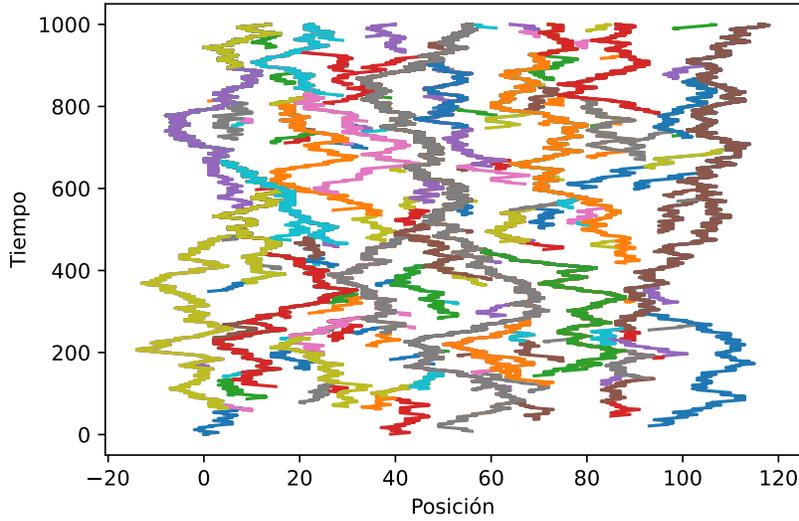


Figura 3.2: Simulación de la web browniana. El código utilizado para generar esta imagen es el mismo de la sección pasada (`caminatas_reticula.py`); únicamente modificamos los valores de x , t y n (ver el Pseudocódigo 4).

3.3 El flujo browniano de Arratia en un intervalo

A continuación analizaremos la coalescencia a partir de un objeto cuyas propiedades son más fáciles de estudiar que las de la web browniana: los movimientos brownianos coalescentes que parten de una recta, donde sin pérdida de generalidad supondremos que está dada por $t = 0$. Arratia probó que este objeto, al que llamó *flujo browniano*, converge en distribución a una colección de movimientos brownianos coalescentes en \mathbb{R} (ver [1, Capítulo 2, Teorema 1]), lo cual puede pensarse como una particularidad del Teorema 3.2.2. Gracias a la propiedad de simetría, es posible simular el flujo browniano en un intervalo generando las trayectorias de derecha a izquierda (o viceversa) y verificando las colisiones de esta manera, resultando en que la trayectoria que parte del extremo derecho del intervalo dictará el camino a seguir una vez producidas todas las coalescencias (ver [1, Teorema 86]).

Como hasta ahora, utilizaremos el escalamiento alternativo de la Sección 1.3 para la simulación de este coalescente. Consideremos la construcción presentada en la Sección 3.1, pero pidiendo ahora que todas las caminatas aleatorias comiencen al tiempo 0; es decir, tomaremos el conjunto $\mathcal{D} = \{(x_j, 0) \mid j \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, el cual es denso numerable en \mathbb{R} . Así, las trayectorias brownianas estarán dadas por

$$B_t^j = x_j + W_t^j, \quad t \geq 0,$$

donde W_t es un movimiento browniano estándar que comienza en 0. Al restringir \mathcal{D} a un conjunto compacto, podemos aproximar estos movimientos brownianos como se muestra en la Figura 3.3. En el primer rectángulo de la misma contamos con las caminatas aleatorias simuladas, mientras que en el segundo mostramos al que llamaremos *diagrama de coalescencias*, el cual conserva la información del tiempo y posición de cada choque entre trayectorias mostrándolo explícitamente, pero suprimiendo por completo el ruido browniano. Aunque es cierto que al considerar 25 caminatas el tiempo máximo de simulación debería ser

3.3. EL FLUJO BROWNIANO DE ARRATIA EN UN INTERVALO

$(2(25 - 1))^2 = 2,304$ de acuerdo con el escalamiento, para una mejor visualización de las primeras coalescencias fue reducido a 500.

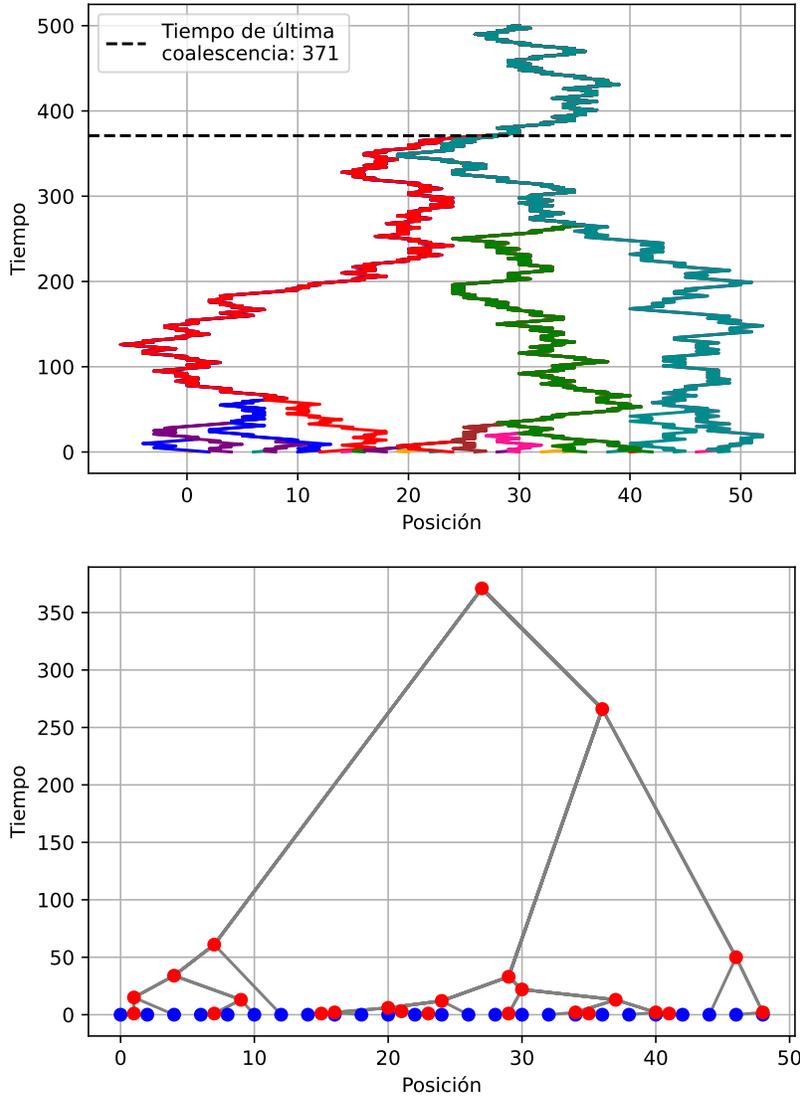


Figura 3.3: Simulación de 25 movimientos brownianos coalescentes (arriba) y diagrama de coalescencias asociado (abajo). Los puntos azules en este último representan los puntos de partida de las caminatas; mientras que los rojos, los puntos de coalescencia.

Observemos que el número de coalescencias cerca del tiempo 0 es muy grande y que conforme $t \rightarrow \infty$ se producen cada vez en menor medida. Si fuera posible simular una cantidad infinita no numerable de trayectorias en lugar de las 25 mostradas, esta propiedad seguiría cumpliéndose y, más aún, quedarían tan solo una cantidad finita de las mismas en la parte superior del gráfico. Esto es consecuencia del decaimiento desde el infinito de la Proposición 3.2.1. A continuación mostramos el pseudocódigo para la simulación de este coalescente.²

²Referirse al archivo `camnatas_recta.py`.

Pseudocódigo 5 Flujo browniano

Notas: a) Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista. b) El índice -1 representa el último elemento de una lista.

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de caminatas; $t_{max} \in \mathbb{Z}^+$: tiempo máximo de simulación.

Inicializar: $caminatas := \underbrace{\{0.5, \dots, 0.5\}}_{t_{max}+1 \text{ veces}}$.

Nota: Utilizamos el número 0.5 para que la primera caminata no cumpla el condicional **if**

```

for  $j \in \{0, 1, \dots, 2n - 2\}$  do
   $caminata := \{j\}$ ,  $valor := j$ 
  Utilizar el Pseudocódigo 2 para llenar las  $t_{max}$  entradas de  $caminata$ .
  for  $i \in \{0, 1, \dots, |caminata|\}$  do
    if  $caminata(i) = caminatas(-1, i)$  then
       $caminata(s) := caminatas(-1, s) \forall s \in \{i + 1, i + 2, \dots, t_{max}\}$ 
    break
  Agregar  $caminata$  a  $caminatas$ 
  Graficar la trayectoria simulada. Mostrar hasta que  $j = 2n - 2$ .

```

Salida: Figura

Notas: a) La salida del código en el repositorio consiste no únicamente en la figura, sino también en el tiempo de última coalescencia, entre otros aspectos. Esto será de utilidad en la siguiente sección, pero no lo incluimos en el pseudocódigo porque el algoritmo es muy extenso.

b) El diagrama de coalescencias fue construido a partir de guardar los puntos de intersección y generar segmentos de recta, de manera similar a como hicimos con el coalescente de Kingman en la Sección 2.3, y es la razón de que guardemos la información de todas las caminatas y no únicamente de la última.

3.3.1 Densidad del tiempo de última coalescencia

El tiempo de última coalescencia en un conjunto de movimientos brownianos estándar coalescentes que parten de un segmento recta depende únicamente de la colisión de las trayectorias que se encuentran en los extremos del mismo, pues cuando ocurre este evento podemos asegurar que las trayectorias internas coalescieron previamente. Así, el problema del cálculo del tiempo de última coalescencia se ve reducido a encontrar la distribución de la primera intersección de dos movimientos brownianos independientes entre sí y separados inicialmente por una distancia $x > 0$ (la longitud del intervalo); es decir, la distribución de la variable aleatoria

$$\tau := \inf \{t \geq 0 \mid B_t^x \leq W_t\},$$

donde $B_t^x = x + \widehat{W}_t$ (con \widehat{W}_t un movimiento browniano estándar) y W_t son movimientos brownianos independientes que empiezan en x y en 0 respectivamente.

Proposición 3.3.1. *Sea W_t un movimiento browniano. El proceso $X_t = -W_t$ es también un movimiento browniano.*

Demostración. i) $X_0 = 0$ c.s.:

$$X_0 = -W_0 = 0 \text{ c.s.}$$

- ii) Trayectorias continuas: El proceso W_t es por hipótesis un movimiento browniano estándar, por lo que sus trayectorias son continuas y, como el producto de una función continua y un escalar es una función continua, las trayectorias de X_t también lo son.
- iii) Incrementos independientes: Por el inciso anterior, $X_t - X_s \stackrel{d}{=} W_t - W_s$ y obtenemos que $(W_t - W_s) \perp (W_u - W_v)$ si $0 \leq v < u \leq s$. En consecuencia, $(X_t - X_s) \perp (X_u - X_v)$.
- iv) Incrementos estacionarios: Sean $t, s \in [0, \infty)$, $s < t$. Sabemos que $X_t - X_s = -(W_t - W_s)$ y como $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, entonces $-(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(-0, (-1)^2 t - s) = \mathcal{N}(0, t - s)$.

Por tanto, el proceso X_t es, en efecto, un movimiento browniano. Más aún, es un movimiento browniano estándar. ■

Consideremos ahora dos movimientos brownianos W_t y B_t^x ; el primero estándar y el segundo tal que $B_0^x = x$ con $x > 0$.

Proposición 3.3.2. *El proceso $B_t^x - W_t$ es un movimiento browniano de varianza $\sigma^2 = 2$ que comienza en x .*

Demostración. i) $B_0^x - W_0 = x$ c.s.:

$$B_0^x - W_0 = x - 0 = x \text{ c.s.}$$

- ii) Trayectorias continuas: B_t^x y W_t son ambos movimientos brownianos, por lo que tienen trayectorias continuas. La suma de funciones continuas es continua, con lo cual el proceso $B_t^x - W_t$ cumple con esta propiedad.
- iii) Incrementos independientes: Sean $s, t \in [0, \infty)$ tales que $s \leq t$. Observemos que

$$(B_t^x - W_t) - (B_s^x - W_s) = B_t^x - W_t - B_s^x + W_s = (B_t^x - B_s^x) - (W_t - W_s),$$

y, como B_t^x y W_t son movimientos brownianos, ocurre que $(B_t^x - B_s^x) \perp (B_u^x - B_v^x)$ y $(W_t - W_s) \perp (W_u - W_v)$ si $0 \leq v \leq u \leq s$. Entonces $(B_t^x - B_s^x) - (W_t - W_s) \perp (B_u^x - B_v^x) - (W_u - W_v)$.

- iv) Incrementos estacionarios: Sean $s, t \in [0, \infty)$ tales que $s \leq t$. Entonces

$$\begin{aligned} (B_t^x - W_t) - (B_s^x - W_s) &= (B_t^x - B_s^x) - (W_t - W_s) \\ &= (x + B_t - (x + B_s)) - (W_t - W_s) \\ &= (B_t - B_s) - (W_t - W_s). \end{aligned}$$

Recordemos que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ y en consecuencia $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Análogamente, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ y así $(B_t - B_s) - (W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, 2(t - s))$.

Por tanto, el proceso $B_t^x - W_t$ es un movimiento browniano que comienza en x . ■

Procederemos a encontrar la densidad del tiempo de última coalescencia. Observemos que $B_t^x = W_t$ si y sólo si $B_t^x - W_t = 0$ y definamos el tiempo de paro $\tau_x = \inf \{t \geq 0 \mid B_t^x - W_t \leq 0\}$. Por el teorema de probabilidad total,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0) &= \mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0 \mid \tau_x > t) \mathbb{P}(\tau_x > t) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0 \mid \tau_x \leq t) \mathbb{P}(\tau_x \leq t), \end{aligned}$$

y como $\tau_x > t$ implica que $B_t^x - W_t > 0$, entonces $\mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0 \mid \tau_x > t) = 0$. Así,

$$\mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0) = \mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0 \mid \tau_x \leq t) \mathbb{P}(\tau_x \leq t).$$

Ahora bien, como consecuencia de la Proposición 3.3.2, $B_{s+\tau_x}^x - W_{s+\tau_x} - (B_{\tau_x}^x - W_{\tau_x}) = B_{s+\tau_x}^x - W_{s+\tau_x}$ es un movimiento browniano y, por el principio de reflexión (Proposición 1.1.3),

$$\mathbb{P}(B_t^x - W_t \leq 0) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau_x \leq t).$$

Dado que el proceso B_t^x puede reescribirse como $x + \widehat{W}_t$, donde \widehat{W}_t es un movimiento browniano estándar, la igualdad anterior se transforma en

$$\mathbb{P}\left(x + \widehat{W}_t - W_t \leq 0\right) = \mathbb{P}\left(\widehat{W}_t - W_t \leq -x\right) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau_x \leq t).$$

La distribución de los procesos independientes W_t y \widehat{W}_t es $\mathcal{N}(0, t)$. Entonces, por la Proposición 3.3.1, $-W_t$ es un movimiento browniano estándar y $-W_t \sim \mathcal{N}(-0, (-1)^2 t)$; es decir, $-W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ y por tanto $\widehat{W}_t + (-W_t) \sim \mathcal{N}(0, 2t)$. Estandarizando:

$$\frac{\widehat{W}_t - W_t}{\sqrt{2t}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Con lo anterior,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_x \leq t) &= 2\mathbb{P}\left(\widehat{W}_t - W_t \leq -x\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(\frac{\widehat{W}_t - W_t}{\sqrt{2t}} \leq -\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(\frac{\widehat{W}_t - W_t}{\sqrt{2t}} \geq \frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy, \end{aligned} \tag{3.2}$$

y derivando respecto a t obtenemos la función de densidad de τ_x :

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x/\sqrt{2t})^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}x}{4t^{3/2}} \right) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{3.3}$$

Así encontramos la ley que sigue $\tau_x = \inf \{t \geq 0 \mid B_t^x \leq W_t\}$, el tiempo de última coalescencia.

Observación: Conforme el número de trayectorias aumenta, el tiempo necesario para que se produzca la última coalescencia también lo hace; es decir, sólo depende de la distancia inicial máxima.

En la Figura 3.4 se muestran la densidad empírica o numérica y la gráfica de la función f_{τ_x} para una distancia entre trayectorias de $x = 18$ (10 caminatas). La relación de proporción entre las variables x y t dada por el reescalamiento en la Sección 1.3 permite la consistencia de los cálculos y el ajuste adecuado del histograma por la curva roja.³

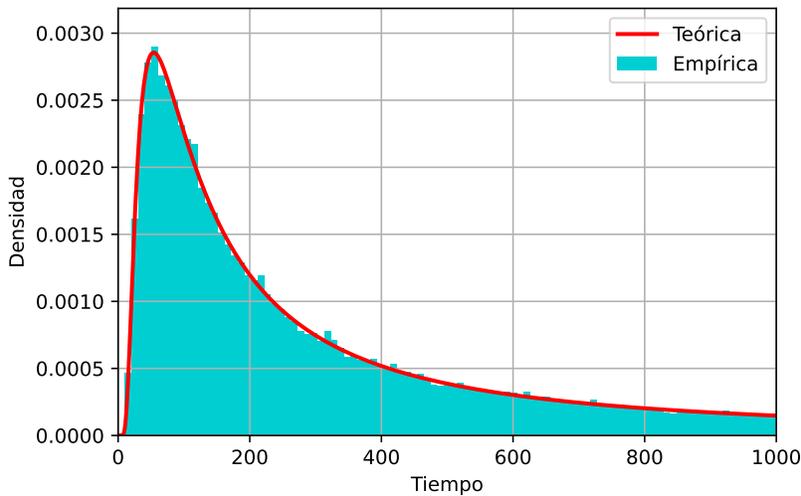


Figura 3.4: Densidad de τ_{18} con 200,000 simulaciones y tiempo máximo de simulación $t_0 = 1,000$.

El número de realizaciones en las cuales la coalescencia no se produjo antes de t_0 ocurrió un total de 62,260 veces, por lo que

$$\mathbb{P}(\tau_{18} \leq 1,000) = 1 - \mathbb{P}(\tau_{18} > 1,000) \approx 1 - \frac{62,260}{200,000} = 0.6887.$$

Este valor se acerca mucho a la probabilidad teórica de coalescencia antes de t_0 dada por la integral, que al calcular numéricamente nos permite obtener un error de aproximación:

$$\epsilon = \left| 0.6887 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{18/\sqrt{2(1,000)}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right| \approx 0.00137819977526,$$

el cual es pequeño y tiende a cero conforme el número de iteraciones crece. Es importante tomar en cuenta que ϵ es una variable aleatoria, pues el número de valores excedentes es aleatorio.

3.3.2 Finitud e integrabilidad

Los siguientes resultados son propiedades de la variable aleatoria τ_x .

Proposición 3.3.3. *El tiempo de última coalescencia es finito c.s.*

³Referirse al archivo `densidad.mb.py`.

Demostración. Efectuando un cálculo directo:

$$\mathbb{P}(\tau_x < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

■

Proposición 3.3.4. *La variable aleatoria τ_x no es integrable.*

Demostración. Por la definición de esperanza,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau_x) &= \int_0^{\infty} t \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt + \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt. \end{aligned}$$

La primer integral es positiva y finita, pues como la distancia entre los dos movimientos brownianos es positiva, entonces $x^2 > 0$, lo cual implica que $e^{-\frac{x^2}{4t}} < 1$ para $t \in (0, 1)$ y

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

De lo anterior, obtenemos la desigualdad

$$\mathbb{E}(\tau_x) \geq \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt.$$

Probaremos a continuación que esta integral es divergente. Tomemos

$$\begin{aligned} u &= e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad u' = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}} x^2}{4t^2} \\ v' &= \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad v = 2\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt &= \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} 2\sqrt{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}} x^2}{4t^2} dt \\ &= \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \Big|_1^{\infty} - \frac{x^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Sea $\omega = x/\sqrt{4t}$. Entonces $d\omega = -x/(4t^{3/2}) dt$ y tenemos que $dt = -4t^{3/2}/x d\omega$. Además

$$\frac{x}{\sqrt{4t}} \Big|_{t=1} = \frac{x}{2} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4t}} = 0.$$

Aplicando este cambio de variables, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt &= \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \Big|_1^\infty - \frac{x^2}{2} \int_{x/2}^0 e^{-\omega^2} \left(-\frac{4}{x} \right) d\omega \\ &= \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \Big|_1^\infty - 2x \int_0^{x/2} e^{-\omega^2} d\omega \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) - 2e^{-x^2/4} - 2x \int_0^{x/2} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Los dos últimos sumandos están bien definidos y son finitos. Para el primero,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \infty.$$

Por tanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt = \infty,$$

lo cual implica que $\mathbb{E}(\tau_x) = \infty$. ■

3.3.3 La ecuación del calor

La forma general de la ecuación del calor unidimensional con constante de difusión D es la siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_t u - D\partial_{xx}u &= 0, \\ u(0, x) &= f(x), \end{aligned} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

La anterior es una ecuación diferencial parcial parabólica que modela, entre otras cosas⁴, la difusión de calor sobre la recta real a través del tiempo a partir de una distribución inicial de calor, la cual está dada punto a punto por la condición inicial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La relación entre el movimiento browniano estándar y la ecuación del calor es muy estrecha, pues la función de distribución del primero es una campana gaussiana para cada tiempo, que a su vez soluciona el problema del calor anterior con $D = 1/2$ (ver [14, Sección 4.3]). La ecuación del calor es lineal y la resta de dos movimientos brownianos es un movimiento browniano, por lo que su función de distribución debe ser también solución de una ecuación.

El problema del calor con constante de difusión 1 y condición inicial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en forma general es el siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx}u &= 0, \\ u(0, x) &= f(x), \end{aligned} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

En esta subsección estudiaremos un problema de este tipo.

Sea μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

⁴Esta ecuación (o su equivalente en una dimensión mayor) no sólo modela la difusión de calor en una superficie, sino también de sustancias en líquidos, gases en el espacio e incluso muchedumbres en movimiento en una ciudad, por mencionar algunos ejemplos. Por ello, tal vez un nombre más adecuado sería ecuación de difusión, pero nos referiremos a ella como ecuación del calor para distinguirla claramente de las difusiones del Capítulo 4.

Definición 3.3.1. Definimos el espacio de funciones esencialmente acotadas en \mathbb{R} como

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible, } \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} < \infty \right\},$$

donde $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_{\mathbb{R}} |f| := \inf \{ M \in [0, \infty] \mid |f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R} \setminus E, \mu(E) = 0 \}$.

Es decir, $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ casi en todas partes (*c.t.p.*). A M se le llama cota esencial de f . Al ínfimo de las cotas esenciales de f se le llama supremo esencial de f y se denota como $\text{ess sup}_{\mathbb{R}} |f|$.

El siguiente resultado nos da la solución del problema (3.4) en forma integral.

Teorema 3.3.1. (Solución de la ecuación del calor con condición inicial). *Sea $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ una función continua y definamos*

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(t, x - y) g(y) dy, \text{ con } \mathcal{H}(t, x - y) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}. \quad (3.5)$$

A \mathcal{H} se le llama núcleo del calor. Entonces

- i) $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$,
- ii) $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ con $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ y
- iii) $\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = g(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

La demostración de este teorema puede consultarse en [15, Teorema 1, Sección 2.3].

A continuación veremos que la función $\mathbb{P}(\tau_x \leq t)$ en (3.2) satisface un problema del calor en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, \\ u(0, x) &= 2 \cdot \mathbb{1}_{\{x \leq 0\}}(x) =: g(x), \end{aligned} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Notemos que $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ pues es Lebesgue medible y $g(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (y $\text{ess sup}_{\mathbb{R}} |g| = 2$) pero no es continua en $x = 0$, por lo que no podemos garantizar que se cumpla el tercer inciso del Teorema 3.3.1. Sin embargo, probaremos que u definida como en (3.5) cumple ser solución *c.t.p.* en x . Primero verificaremos la igualdad entre las derivadas y posteriormente la convergencia a la condición inicial para todo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La convolución de la condición inicial con el núcleo del calor es

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot 2 \cdot \mathbb{1}_{\{y \leq 0\}}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Haciendo el cambio de variables $v = (x - y) / \sqrt{2t}$, $dv = -1/\sqrt{2t} dy$ en esta última integral, obtenemos que

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-v^2/2} dv,$$

la cual efectivamente es la función $\mathbb{P}(\tau_x \leq t)$. Podemos escribir a ésta como sigue:

$$u(t, x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2t}} e^{-y^2/2} dy. \quad (3.7)$$

Derivando dos veces respecto a x ,

$$\begin{aligned}
 \partial_{xx}u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2t}} e^{-y^2/2} dy \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x/\sqrt{2t})^2/2} \left(\frac{\sqrt{2t}}{2t} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{4t \cdot 2x}{16t^2} \right) \\
 &= \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}},
 \end{aligned}$$

y por la relación (3.3) ocurre que

$$\partial_{xx}u(t, x) = \partial_t u(t, x),$$

cumpléndose así la igualdad entre las derivadas.

Procederemos a probar la convergencia a la condición inicial *c.t.p.* Observemos que no podemos sustituir $t = 0$ en la fórmula de u y en consecuencia debemos calcular el límite cuando $t \downarrow 0$:

- Si $x > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2t}} e^{-y^2/2} dy \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 0.$$

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2t}} e^{-y^2/2} dy \right) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-y^2/2} dy \\
 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

- Si $x = 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0/\sqrt{2t}} e^{-y^2/2} dy \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Es decir,

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0, \\ 2, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde la primera igualdad ocurre *c.t.p.* (en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Por tanto, la función $\mathbb{P}(\tau_x \leq t)$ satisface el problema del calor (3.6) con el detalle de que la convergencia a la condición inicial g es casi en todas partes. Esta ecuación tiene la siguiente interpretación: al tiempo cero la probabilidad de que dos movimientos brownianos se intersequen es también cero, ya que estamos considerando que comienzan en puntos diferentes y es por ello que $g \equiv 0$ si $x > 0$. La probabilidad se encuentra en principio concentrada en los valores de x negativos para que, en cuanto los movimientos brownianos comiencen a moverse, se difunda hacia los positivos pues para tiempos mayores que cero la probabilidad de colisión ya es positiva. Conforme el tiempo avanza es cada vez más probable que las trayectorias ya se hayan encontrado, pues

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_x \leq t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 1,$$

tal y como probamos en la Proposición 3.3.3. En la Figura 3.5 podemos observar la evolución de $u(t, x)$ al graficar las curvas solución para ciertos valores de t .

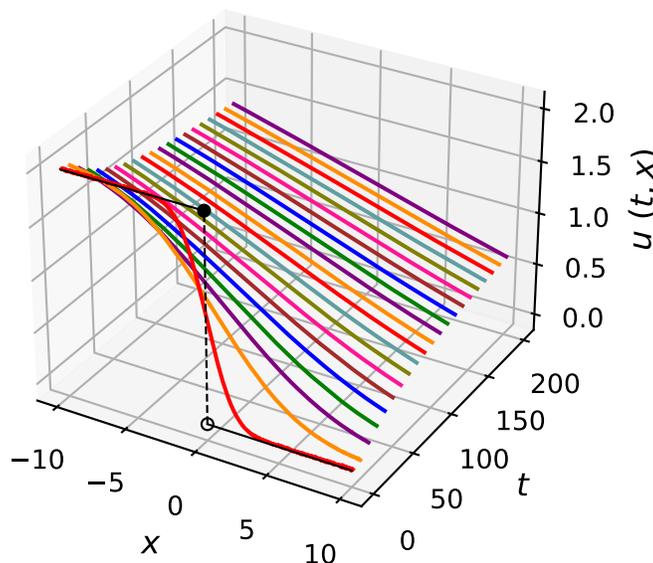


Figura 3.5: Condición inicial y curvas solución del problema 3.6.

El método numérico usado para calcular la familia de integrales en la ecuación (3.7) y graficar las curvas solución es el siguiente:

Proposición 3.3.5. (Método de integración Monte Carlo). Sean $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\text{Sop}(f) = [a, b]$ una función integrable en (a, b) . Dada la partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, donde cada uno de los puntos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} es generado por una distribución de probabilidad $\mathcal{U}(a, b)$, podemos aproximar la integral de f como

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \quad (3.8)$$

3.3. EL FLUJO BROWNIANO DE ARRATIA EN UN INTERVALO

Demostración. Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Por la definición de esperanza,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_X(x) dx = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

de donde

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \mathbb{E}(f(X)).$$

Por la ley fuerte de los grandes números,

$$\mathbb{P} \left(\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \right) = 1,$$

por lo cual la suma del lado derecho en (3.8) converge a la integral del lado izquierdo *c.s.* ■

Nota: Una manera cuantitativamente equivalente de escribir el problema del calor anterior es utilizar condiciones de frontera de Dirichlet: $u(t, 0) = \kappa$, $\kappa > 0$. Sustituyendo $x = 0$ en la solución (3.7) obtenemos que $u(t, 0) = 1$. Por otro lado, la condición inicial de la ecuación es, por los límites calculados previamente,

$$h(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Así, el problema del calor con condiciones de frontera de Dirichlet es

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, \\ u(0, x) &= h(x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times [0, \infty), \\ u(t, 0) &= 1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

el cual ya no requiere realizar una extensión del dominio espacial a valores negativos, pues la probabilidad será suministrada en todo tiempo en el punto $x = 0$ (cuando contamos con un único movimiento browniano) hasta que la solución alcance el límite 1.

Capítulo 4

Procesos de Itô: Intersección de trayectorias

En este capítulo generalizaremos ciertos aspectos desarrollados anteriormente para trabajar con coalescentes de procesos que son soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas pero no movimientos brownianos estándar. Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una ecuación diferencial cuya dinámica se encuentra gobernada por un término determinista pero alterada por otro término estocástico, también conocido como ruido. Si bien la primera EDE se le atribuye al físico y químico francés Paul Langevin a principios del siglo XX [16], la teoría del cálculo estocástico se formalizó debido a la necesidad de extender el concepto de diferenciabilidad al movimiento browniano [14], pues como lo indicamos en la Proposición 1.1.2, este proceso en principio no cumple dicha propiedad. La utilidad de este tipo de ecuaciones en las aplicaciones es enorme, puesto que los fenómenos biológicos, físicos, financieros y sociales cuentan muy a menudo, si no es que siempre, con variables externas al sistema que son ruido o debido a la complejidad de su modelación pueden considerarse como tal. Aunque existen diferentes formas de construir una EDE (por ejemplo, vía la integral de Stratonovich), utilizaremos la integral de Itô de aquí en adelante, pues esto nos permitirá trabajar con martingalas. En este capítulo mostraremos algunos ejemplos de EDEs, simularemos sus trayectorias, encontraremos numéricamente y, cuando sea posible, analíticamente la densidad del tiempo de coalescencia entre dos de ellas y propondremos una forma general de simular al coalescente con un número finito de trayectorias. A pesar de que en dos de los tres ejemplos que trataremos a continuación obtendremos la fórmula cerrada del proceso solución de la ecuación, utilizaremos el método numérico de Euler-Maruyama para simular las trayectorias del mismo. Las referencias principales para este capítulo son [7, 8, 9, 14, 17, 18, 19].

4.1 Ecuaciones diferenciales estocásticas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición 4.1.1. Definimos el espacio de procesos cuadrado integrables como

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{P}) := \left\{ X : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{E} \left(X_t^2 \right)^{1/2} < \infty \text{ para todo } t \geq 0 \right\}.$$

Definición 4.1.2. Un proceso simple $(\xi(t))_{t \geq 0}$ es aquel de la forma

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_{t_i} \mathbb{1}_{t \in [t_i, t_{i+1})}(t),$$

donde $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ y para cada i el proceso $\xi_{t_i} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ es \mathcal{F}_{t_i} -medible. Si $t \in [t_{k-1}, t_k)$, definimos la integral $I : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del proceso simple como

$$I_t = \sum_{j=0}^{k-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \xi(t_k) (W_t - W_{t_k}). \quad (4.1)$$

Definición 4.1.3. Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento browniano y sea $(\xi(t))_{t \geq 0}$ un proceso cuadrado integrable, con trayectorias continuas y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Definimos la integral de Itô¹ como

$$\mathcal{I}_t := \int_0^t \xi(s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \xi_n(s) dW_s \text{ en } \mathcal{L}^2(\mathbb{P}), \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

donde $\{\xi_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de procesos simples que cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_0^t (\xi_n(s) - \xi(s))^2 ds \right) = 0.$$

Los teoremas de existencia de la sucesión $\{\xi_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ y de la integral de Itô definida arriba pueden consultarse en [18, Teoremas 1.3.2 y 1.3.3].

Proposición 4.1.1. Para $\xi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, la integral definida en (4.2) es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Demostración. Denotaremos al espacio de martingalas cuadrado integrables como \mathcal{M}_2 . La idea será probar que la integral estocástica de un proceso simple es una martingala y utilizaremos que \mathcal{M}_2 es un espacio de Banach para extender el resultado.

Sea $T > 0$. Tomemos $0 \leq s \leq t \leq T$ y supongamos que s y t se encuentran en subintervalos diferentes de \mathcal{P} . Entonces existen dos puntos t_m y t_k tales que $t_m < t_k$ y $s \in [t_m, t_{m+1})$ y $t \in [t_k, t_{k+1})$. Reescribimos la ecuación (4.1) como

$$\begin{aligned} I_t &= \sum_{j=0}^{m-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \xi(t_m) (W_{t_{m+1}} - W_{t_m}) \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^{k-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \xi(t_k) (W_t - W_{t_k}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s \right) + \mathbb{E} \left(\xi(t_m) (W_{t_{m+1}} - W_{t_m}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{j=m+1}^{k-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s \right) + \mathbb{E} \left(\xi(t_k) (W_t - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Toma el nombre del matemático japonés Kiyoshi Itô (1915 – 2008).

Como $t_m < s$, el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es \mathcal{F}_s -medible. Para el segundo término, usando que el movimiento browniano es una martingala tenemos que

$$\mathbb{E} \left(\xi(t_m) (W_{t_{m+1}} - W_{t_m}) \mid \mathcal{F}_s \right) = \xi(t_m) \left(\mathbb{E}(W_{t_{m+1}} \mid \mathcal{F}_s) - W_{t_m} \right) = \xi(t_m) (W_s - W_{t_m}).$$

Falta corroborar que la esperanza condicional de los últimos dos términos de (4.3) es 0. En el penúltimo término la esperanza puede entrar en la suma, y al usar esperanzas condicionales iteradas obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k-1} \mathbb{E} \left(\xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s \right) &= \sum_{j=m+1}^{k-1} \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j} \right) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \sum_{j=m+1}^{k-1} \mathbb{E} \left(\xi(t_j) \left(\mathbb{E}(W_{t_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{t_j}) - W_{t_j} \right) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \sum_{j=m+1}^{k-1} \mathbb{E} \left(\xi(t_j) (W_{t_j} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\xi(t_k) (W_t - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s \right) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\xi(t_k) (W_t - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\xi(t_k) \left(\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_{t_k}) - W_{t_k} \right) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\xi(t_k) (W_{t_k} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sumando los desarrollos de los cuatro términos:

$$\mathbb{E}(I_t \mid \mathcal{F}_s) = \sum_{j=0}^{m-1} \xi(t_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \xi(t_m) (W_s - W_{t_m}) = I_s.$$

Con esto probamos que la integral de un proceso simple es una martingala. Finalmente como \mathcal{M}_2 es completo (ver [14, Proposición 5.23]), el límite de sucesiones en \mathcal{M}_2 es un elemento de \mathcal{M}_2 . Concluimos entonces que la integral de Itô (4.2) es una martingala. ■

Proposición 4.1.2. *La variación cuadrática acumulada hasta el tiempo t por la integral de Itô (4.2) es*

$$\langle \mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle_t = \int_0^t \xi^2(u) du.$$

La demostración de este resultado en una versión más general puede consultarse en [14, Pág. 138]. En este caso la martingala continua que consideraremos es el movimiento browniano, y es por la Proposición 1.1.4 que el diferencial de la integral es du .

Definición 4.1.4. Sean $\Theta, \Gamma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una ecuación estocástica es aquella de la forma

$$dX_t = \Theta(t, X_t) dt + \Gamma(t, X_t) dW_t,$$

definida para $t \in [0, T]$ y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se presupone \mathcal{F}_0 -medible e independiente del movimiento browniano. La ecuación anterior se puede reescribir en forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Theta(s, X_s) ds + \int_0^t \Gamma(s, X_s) dW_s, \quad (4.4)$$

en donde la primera integral es una integral de Lebesgue-Stieltjes, mientras que la segunda es una integral de Itô. Al proceso X_t se le llama proceso de Itô o solución fuerte de la EDE.

Las funciones Θ y Γ se llaman coeficientes de deriva y difusión respectivamente. El siguiente teorema establece las condiciones para que la ecuación diferencial estocástica (4.4) tenga solución única.

Teorema 4.1.1. (Teorema de existencia y unicidad). *Si Θ y Γ son funciones continuas tales que existe $K < \infty$ con*

i) *condición de Lipschitz:*

$$|\Theta(t, x) - \Theta(t, y)| + |\Gamma(t, x) - \Gamma(t, y)| \leq K|x - y|,$$

ii) *condición de crecimiento:*

$$|\Theta(t, x)| + |\Gamma(t, x)| \leq K(1 + |x|),$$

iii) *cuadrado integrabilidad:*

$$\mathbb{E}(X_0^2) < \infty,$$

entonces para todo $T \geq 0$ la ecuación (4.4) admite una solución única en el intervalo $[0, T]$. Más aún, esta solución $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$, cumple

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < \infty.$$

La unicidad significa que si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ son dos soluciones de la ecuación (4.4), entonces para todo $0 \leq t \leq T$, $X_t = Y_t$ c.s.

Una demostración de este teorema puede leerse en [14, Teorema 2.9].

La siguiente herramienta resulta ser de gran utilidad para resolver algunas ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 4.1.2. (Fórmula de Itô-Doeblin²). *Si X_t es un proceso de Itô dado por (4.4) y $f(t, x)$ es una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación estocástica*

$$dY_t = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) (dX_t)^2.$$

²Este resultado también se le suele atribuir, desde el año 2000, al matemático francés Wolfgang Doeblin (1915 – 1940). Ver [8, Sección 4.9].

La demostración del teorema puede ser consultada en [14, Teorema 3.3].

Para calcular el término $(dX_t)^2$, hacemos uso de la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3. *La variación cuadrática del proceso (4.4) es*

$$(dX_t)^2 = \langle X, X \rangle_t = \int_0^t \Gamma^2(s) ds.$$

Demostración. Para simplificar la notación, tomemos

$$\mathcal{I}_t := \int_0^t \Gamma(s, X_s) dW_s \quad \text{y} \quad \mathcal{J}_t := \int_0^t \Theta(s, X_s) ds.$$

De acuerdo con la Definición 1.1.9, la variación cuadrática de (4.4) está dada por

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_t &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \right)^2 \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_0 + \mathcal{J}_{t_{j+1}} + \mathcal{I}_{t_{j+1}} - \left(X_0 + \mathcal{J}_{t_j} + \mathcal{I}_{t_j} \right) \right)^2 \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j} \right) + \left(\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j} \right) \right)^2 \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j} \right)^2 + \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j} \right)^2 \\ &\quad + 2 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j} \right) \left(\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j} \right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por la Proposición 4.1.2, el segundo término en el lado derecho de la última igualdad converge a la variación cuadrática de \mathcal{I} en el intervalo $[0, t]$. Los otros dos términos pueden ser acotados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_t &= \langle \mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle_t + \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j} \right)^2 + 2 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j} \right) \left(\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j} \right) \\ &\leq \langle \mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle_t + \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \mathcal{J}_{t_{k+1}} - \mathcal{J}_{t_k} \right| \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Theta(s, X_s) ds \right| \\ &\quad + 2 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \mathcal{I}_{t_{k+1}} - \mathcal{I}_{t_k} \right| \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Theta(s, X_s) ds \right|. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Theta(s, X_s) ds \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\Theta(s, X_s)| ds = \int_0^t |\Theta(s, X_s)| ds,$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_t &\leq \langle \mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle_t + \int_0^t |\Theta(s, X_s)| ds \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j}| \\ &\quad + 2 \int_0^t |\Theta(s, X_s)| ds \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j}|. \end{aligned}$$

Los dos límites en la desigualdad anterior son cero debido a la continuidad de las integrales \mathcal{J}_t y \mathcal{I}_t . En particular, los límites

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j})^2 \quad \text{y} \quad \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{J}_{t_{j+1}} - \mathcal{J}_{t_j}) (\mathcal{I}_{t_{j+1}} - \mathcal{I}_{t_j})$$

en la ecuación (4.5) son ambos cero. Obtenemos así que

$$\langle X, X \rangle_t = \langle \mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle_t = \int_0^t \Gamma^2(s) ds,$$

con lo que concluimos la demostración. ■

4.2 El método de aproximación de Euler-Maruyama

El siguiente método numérico es una extensión del de Euler para aproximar la solución de una EDE con la forma (4.4), y debe su nombre al matemático alemán Leonhard Euler (1707–1783) y al matemático japonés Gisiro Maruyama (1916–1986).

Consideremos la discretización del tiempo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ del intervalo $[0, T]$. La aproximación de Euler-Maruyama es un proceso estocástico a tiempo continuo $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ que satisface el esquema iterativo

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \Theta(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \Gamma(t_i, Y_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\ &= Y_i + \Theta(t_i, Y_i)\Delta_i + \Gamma(t_i, Y_i)\Delta W_i, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $i = 1, 2, \dots, N-1$, $Y(t_i) \equiv Y_i$, $Y_0 = X_0$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Si la partición del intervalo $[0, T]$ es equidistante, entonces $\Delta_i \equiv \Delta = T/N$.

La justificación de la fórmula anterior es la siguiente. Dada la ecuación (4.4), podemos escribir a los incrementos del proceso solución X_t como

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Theta(t, X_t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma(t, X_t) dW_t.$$

Cada término en el lado derecho de la ecuación anterior aproxima a su correspondiente término en la ecuación (4.4). Por la propiedad de incrementos estacionarios, $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$ y al estandarizar obtenemos que $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta} \mathcal{N}(0, 1)$. Podemos entonces reescribir la ecuación (4.6), con propósitos de aproximación, como

$$Y_{i+1} = Y_i + \Theta(t_i, Y_i)T/N + \Gamma(t_i, Y_i)\sqrt{T/N} Z,$$

donde $i = 1, 2, \dots, N-1$ y $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Para leer más sobre la convergencia del método y las modificaciones que se le pueden hacer, referirse a [19, Capítulo 7].

A continuación utilizaremos la aproximación de Euler-Maruyama³ para simular trayectorias de los procesos solución de algunas EDEs y estudiar propiedades de su intersección.

Pseudocódigo 6 Euler-Maruyama

Nota: El índice -1 representa el último elemento de una lista.

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos; $t_{max} \in \mathbb{R}^+$: máximo del intervalo de tiempo; $x_0 \geq 0$: condición inicial; Θ, Γ : coeficientes de deriva y difusión (funciones).

Inicializar: $X := \{x_0\}$, *tiempos*: partición de $[0, t_{max}]$ con n elementos.

$\Delta := t_{max}/n$

for $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ **do**

$y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$valor := X(-1) + \Theta(X(-1), tiempos(-1)) \Delta + \Gamma(X(-1), tiempos(-1)) \sqrt{\Delta} y$

Agregar *valor* a X

Graficar *tiempos* contra X

Salida: Figura; X .

Aproximación al punto de intersección

Simularemos las trayectorias de dos procesos solución \hat{Y}_t y \bar{Y}_t de algunas EDEs con diferentes condiciones iniciales y encontraremos numéricamente el punto de intersección. Este no puede ser obtenido (casi nunca) con exactitud, nuevamente debido a la discretización del tiempo y espacio en el método de Euler-Maruyama.

Sean y_0 la condición inicial del proceso \hat{Y}_t y y_1 la de \bar{Y}_t . Sin pérdida de generalidad, supongamos $y_0 < y_1$ y definamos el tiempo de intersección como

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid \bar{Y}_t \leq \hat{Y}_t\}.$$

Al discretizar las soluciones, el ínfimo anterior podría encontrarse lejos del punto de intersección observado, por lo que la aproximación no sería muy buena. Sin embargo, que una trayectoria de \bar{Y}_t se encuentre por debajo de una de \hat{Y}_t a partir del tiempo t_k es una condición de paro adecuada para el algoritmo. Lo que haremos a continuación será una corrección que nos garantice una mayor precisión al realizar la aproximación al punto de intersección cuando el tamaño de paso es pequeño.

Supongamos que t_k es el primer tiempo en la partición del intervalo de simulación para el cual la condición de paro $\bar{Y}_t \leq \hat{Y}_t$ se satisface. Entonces $\bar{Y}_{t_{k-1}} - \hat{Y}_{t_{k-1}} \geq 0$ y podemos aproximar el punto de intersección considerando alguna de las siguientes dos opciones:

1.

$$\bar{t} = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{\bar{Y}_{t_k} + \bar{Y}_{t_{k-1}}}{2}, \quad \text{ó}$$

³Para el algoritmo general, referirse al archivo `euler_maruyama.py`.

2.

$$\hat{t} = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} \quad \text{y} \quad \hat{x} = \frac{\hat{Y}_{t_k} + \hat{Y}_{t_{k-1}}}{2}.$$

En ambos casos estamos tomando como coordenadas de intersección los puntos medios de dos segmentos de recta, puesto que en las dos situaciones la primer coordenada es el punto medio del intervalo temporal en donde sabemos con certeza que se produjo la intersección. No obstante, la segunda coordenada varía en cada caso pero en ambos representa el punto medio del segmento de recta espacio-temporal de alguna de las trayectorias. Por cuestiones prácticas y sin pérdida de generalidad, haremos uso siempre del primer caso.

Observación: Consideremos dos trayectorias asociadas a las verdaderas soluciones de (4.4) con condiciones iniciales y_0 y y_1 y supongamos que se intersecan en el punto (t^*, x^*) . Entonces (\bar{t}, \bar{x}) y (\hat{t}, \hat{x}) tienden a (t^*, x^*) en distribución conforme el número de pasos N del método de Euler-Maruyama tiende a infinito, ya que bajo este límite las trayectorias simuladas convergen en distribución a las verdaderas.

Esta corrección se puede implementar de la siguiente manera:

Pseudocódigo 7 Punto de intersección

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos; $t_{max} \in \mathbb{R}^+$: máximo del intervalo de tiempo; $x_0 \geq 0$: primera condición inicial; $x_1 \geq 0$: segunda condición inicial; Θ, Γ : coeficientes de deriva y difusión (funciones). Tomar $x_0 < x_1$.

Inicializar: $X := \{x_0\}$, $Y := \{x_1\}$, *tiempos*: partición de $[0, t_{max}]$ con n elementos.

Completar las listas X y Y independientemente con el método de Euler-Maruyama (Pseudocódigo 6).

```

for  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  do
  if  $Y(i) < X(i)$  then
    altura :=  $(Y(i) + Y(i - 1)) / 2$ 
    tiempo :=  $(\text{tiempos}(i) + \text{tiempos}(i - 1)) / 2$ 
  break

```

Salida: *tiempo*; *altura*.

Nota: No necesariamente las trayectorias deben de tener los mismos coeficientes de deriva y difusión, pero para efectos de lo que desarrollaremos en las siguientes secciones los tomaremos de esta manera.

4.3 El movimiento browniano geométrico

Este proceso es ampliamente utilizado en finanzas y es clave en la deducción de la fórmula de Black-Scholes, la cual fue propuesta por Fischer Black (1938 – 1995) y Myron Scholes (1942–) para describir la evolución del precio de una acción a través del tiempo, y este último autor

fue galardonado en 1997 con el Premio Nobel de Economía por el desarrollo del modelo. El movimiento browniano geométrico (MBG) se basa en la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dt}S_t = \mu S_t,$$

que modela el precio de una acción libre de riesgo con tasa de interés constante μ . Sin embargo, debido a las fluctuaciones de los mercados financieros, se agrega a la ecuación anterior un término de difusión que representa que la acción conlleva riesgo. La ecuación diferencial se transforma entonces en la EDE

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde μ y σ son dos constantes positivas y x_0 es el precio inicial. A σ se le llama volatilidad de la acción.

Cálculo de la solución

Veamos que los coeficientes de deriva y difusión $\Theta(t, x) = \mu x$ y $\Gamma(t, x) = \sigma x$ satisfacen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de la solución:

i) Condición de Lipschitz:

$$|\mu x - \mu y| + |\sigma x - \sigma y| = \mu |x - y| + \sigma |x - y| = (\mu + \sigma) |x - y|.$$

Tomando $K = \mu + \sigma$ obtenemos que se cumple esta condición.

ii) Condición de crecimiento:

$$|\mu x| + |\sigma x| = \mu |x| + \sigma |x| = (\mu + \sigma) |x| = K |x| \leq K (1 + |x|).$$

iii) La condición inicial $S_0 = x_0$ se supone constante, por lo que se cumple también la cuadrado integrabilidad.

Al igualar (4.7) con la ecuación de la fórmula de Itô-Doebelin,

$$\begin{aligned} \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t &= f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) (dW_t)^2 \\ &= f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) dt, \end{aligned}$$

donde $S_t = f(t, W_t)$. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu f(t, x) &= f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x), \\ \sigma f(t, x) &= f_x(t, x). \end{aligned}$$

La segunda ecuación es la llamada ecuación de Malthus y su solución es $y = ce^{\sigma x}$, pues $y' = c\sigma e^{\sigma x} = \sigma y$. Si c es una función positiva del tiempo, entonces podemos reescribir la solución como $f(t, x) = e^{\sigma x + g(t)}$. Sustituyendo en la primera ecuación,

$$\mu e^{\sigma x + g(t)} = \partial_t \left(e^{\sigma x + g(t)} \right) + \frac{1}{2} \partial_{xx} \left(e^{\sigma x + g(t)} \right) = e^{\sigma x} g'(t) e^{g(t)} + \frac{1}{2} e^{g(t)} \sigma^2 e^{\sigma x},$$

4.3. EL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

de donde $\mu = g'(t) + \sigma^2/2$ y tenemos que $g(t) = \mu t - \sigma^2 t/2 + b$. De aquí,

$$S_t = f(t, W_t) = e^{\sigma W_t + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + b},$$

y como $S_0 = x_0$ entonces $S_0 = e^b = x_0$ y obtenemos que $b = \ln(x_0)$. Por tanto, la solución de (4.7) está dada por

$$S_t = x_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}. \quad (4.8)$$

El proceso S_t es el llamado movimiento browniano geométrico.

Proposición 4.3.1. *Para el proceso S_t se cumple que*

- i) $\mathbb{E}(S_t) = x_0 e^{\mu t}$.
- ii) $\text{Var}(S_t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Demostración. i) Por la linealidad de la esperanza,

$$\mathbb{E}(S_t) = x_0 \mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t}\right) = x_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t} \mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t}\right).$$

El término $\mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t}\right)$ corresponde a la función generadora de momentos con variable independiente σ de una normal con media cero y varianza t , por lo cual

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}(0, t)}(\sigma) = \mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t}\right) = e^{\frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Sustituyendo en la expresión de $\mathbb{E}(S_t)$:

$$\mathbb{E}(S_t) = x_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\frac{\sigma^2}{2} t} = x_0 e^{\mu t}.$$

ii) Utilizando las propiedades de la varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_t) &= \text{Var}\left(x_0 e^{\sigma W_t + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t}\right) \\ &= \left(x_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t}\right)^2 \text{Var}\left(e^{\sigma W_t}\right) \\ &= x_0^2 e^{2\mu t - \sigma^2 t} \left(\mathbb{E}\left(e^{2\sigma W_t}\right) - \mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Por el inciso anterior, $\mathbb{E}\left(e^{2\sigma W_t}\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{N}(0, t)}(2\sigma) = e^{2\sigma^2 t}$ y $\mathbb{E}\left(e^{\sigma W_t}\right)^2 = e^{\sigma^2 t}$. Entonces

$$\text{Var}(S_t) = x_0^2 e^{2\mu t - \sigma^2 t} (e^{2\sigma^2 t} - e^{\sigma^2 t}) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Esto completa la demostración. ■

En la Figura 4.1 podemos observar una trayectoria del proceso S_t simulada con el método de Euler-Maruyama junto con la curva $\mathbb{E}(S_t)$.

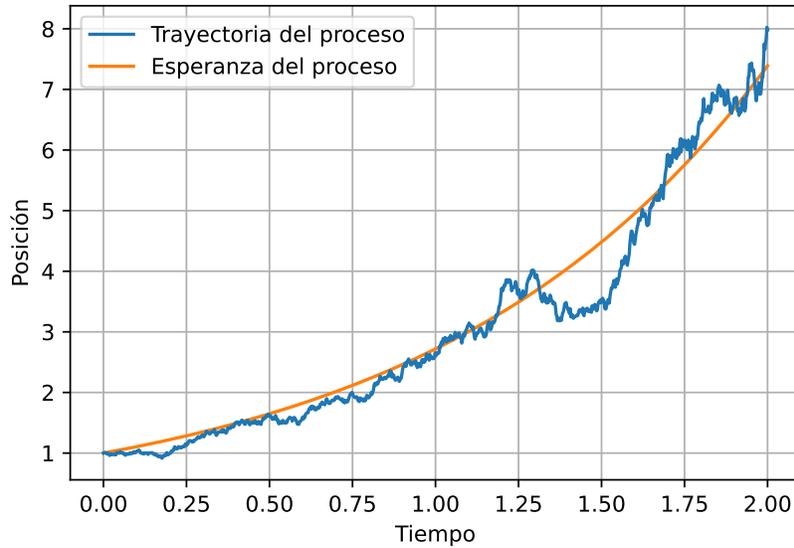


Figura 4.1: Trayectoria del MBG con 1,000 pasos, $x_0 = 1$, $\mu = 1$ y $\sigma = 1/3$.

Tiempo de intersección

Podemos generar múltiples trayectorias de la solución de (4.7) con diferentes condiciones iniciales para simular el coalescente, como haremos en la última parte de este capítulo (Sección 4.6). Por el momento nos centraremos en trabajar con dos trayectorias de este proceso y estudiar su intersección. De la Figura 4.1 y de la Proposición 4.3.1 notemos que

- La esperanza del MBG diverge.
- Para condiciones iniciales cercanas a cero y tiempos no muy grandes la dinámica de la trayectoria es muy débil (pues la varianza de S_t es pequeña).

Sorprendentemente, a pesar del comportamiento exponencial (creciente) del proceso (4.8), las propiedades de la intersección de las trayectorias del movimiento browniano geométrico no difieren mucho de las que presentan las del movimiento browniano estándar. Por supuesto, las condiciones iniciales deben ser estrictamente positivas, pues si tomamos una de ellas igual a cero la dinámica se ve completamente anulada.

Proposición 4.3.2. *Sea $\tau_{x,y} = \inf \{t > 0 \mid S_t^x \leq S_t^y\}$, donde $0 < y < x$ sin pérdida de generalidad. Sean S_t^x y S_t^y las trayectorias del MBG que comienzan en x y y respectivamente. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) = 1.$$

Demostración. La idea de la prueba es reescribir el movimiento browniano geométrico en términos de un movimiento browniano estándar para seguir un procedimiento similar al de la

Subsección 3.3.1. Comenzaremos por realizar la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_t^x - S_t^y \leq 0) &= \mathbb{P}\left(xe^{\sigma B_t + \mu t - \sigma^2 t/2} - ye^{\sigma W_t + \mu t - \sigma^2 t/2} \leq 0\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(xe^{\sigma B_t} - ye^{\sigma W_t} \leq 0\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(xe^{\sigma B_t} \leq ye^{\sigma W_t}\right) \\
 &= \mathbb{P}(\ln x + \sigma B_t \leq \ln y + \sigma W_t) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{\ln x - \ln y}{\sigma} \leq W_t - B_t\right).
 \end{aligned}$$

Como suponemos $x > y$, entonces

$$\tau_{x,y} = \inf \left\{ t > 0 \mid \frac{\ln x - \ln y}{\sigma} \leq W_t - B_t \right\}.$$

Por la Proposición 3.3.2, el proceso $W_t - B_t$ es un movimiento browniano con varianza $\sigma^2 = 2$. Utilizando el principio de reflexión, tenemos la igualdad

$$2\mathbb{P}\left(\frac{\ln x - \ln y}{\sigma} \leq W_t - B_t\right) = \mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t).$$

Ahora bien, $Z := (W_t - B_t) / \sqrt{2t}$ es una variable aleatoria normal estándar, por lo que

$$\mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) = 2\mathbb{P}\left(\frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}} \leq Z\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz. \quad (4.9)$$

Finalmente, haciendo tender t a infinito, obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Por tanto, el tiempo de coalescencia de las trayectorias en cuestión es finito *c.s.* ■

No obstante, la probabilidad de intersección antes de un tiempo fijo t tiende a cero conforme la condición inicial y también lo hace, pues

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2t}} \lim_{y \rightarrow 0} (\ln x - \ln y) = \infty.$$

Por lo cual, al hacer tender la segunda condición inicial y hacia cero, tenemos que

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

Esto se debe a que la dinámica del proceso está controlada cuando la altura de la trayectoria es pequeña, por lo que tiene que aumentar para que su movimiento errático sea grande y se produzca la intersección. Por esta razón, el tiempo de simulación debe ser significativamente grande para que la tasa de aceptación sea buena, causando que el algoritmo para simular la intersección resulte más lento que en el caso de movimientos brownianos estándar.

Al derivar (4.9) respecto a t obtenemos la función de densidad de $\tau_{x,y}$:

$$\begin{aligned} f_{\tau_{x,y}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - \ln y}{\sigma\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{2\sigma^2 t}} \frac{\sqrt{2}(\ln x - \ln y)}{4\sigma t^{3/2}} \\ &= \frac{\ln x - \ln y}{2\sigma\sqrt{\pi}t^3} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}}. \end{aligned}$$

Notemos que al tomar $\sigma = 1$ y $z = \ln x - \ln y = \ln(x/y)$ recuperamos la función de densidad del tiempo de intersección de dos movimientos brownianos (3.3), por lo que $f_{\tau_{x,y}}$ puede verse como una generalización de dicha densidad. Afirmamos entonces que se cumplen algunas propiedades similares:

- La variable aleatoria $\tau_{x,y}$ no es integrable, pues

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau_{x,y}) &= \int_0^{\infty} t \frac{\ln x - \ln y}{2\sigma\sqrt{\pi}t^3} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt \\ &= \frac{\ln x - \ln y}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt \\ &= \frac{\ln x - \ln y}{2\sigma\sqrt{\pi}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt \right). \end{aligned}$$

Estas integrales son muy parecidas a las que trabajamos en la Proposición 3.3.4 (difieren únicamente en la constante del denominador de la exponencial) y en consecuencia

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt < 2 \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt = \infty,$$

de donde

$$\mathbb{E}(\tau_{x,y}) > \frac{\ln x - \ln y}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\ln x - \ln y)^2}{4\sigma^2 t}} dt = \infty.$$

- Tomando $z = \ln(x/y)$, podemos reescribir la función (4.9) como

$$\mathbb{P}(\tau_{z(x,y)} \leq t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sigma\sqrt{2t}}} e^{-\omega^2/2} d\omega. \quad (4.10)$$

De acuerdo con el límite $t \downarrow 0$ calculado para los casos en los que la variable espacial era positiva y negativa en la Sección 3.3.3, obtenemos aquí que al extender el espacio a valores negativos (es decir, si permitimos que $x < y$ con $x, y > 0$),

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(\tau_{z(x,y)} \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si } z > 0, \\ 2, & \text{si } z < 0, \\ 1, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Al derivar (4.10) dos veces respecto a z ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{P} \left(\tau_{z(x,y)} \leq t \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sigma\sqrt{2t}}} e^{-\omega^2/2} d\omega \right) \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{2t}}\right)^2/2} \frac{\sqrt{2}}{2\sigma\sqrt{t}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi t}} \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2 t}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2 t}} \left(-\frac{z}{2\sigma^2 t} \right) \\
 &= \frac{z}{2\sigma^3\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2 t}} \\
 &= \frac{1}{\sigma} f_{\tau_{x,y}}(t).
 \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que la función $u(t, z) := \mathbb{P} \left(\tau_{z(x,y)} \leq t \right)$ satisface el problema

$$\begin{aligned}
 \partial_t u - \sigma \partial_{zz} u &= 0, \\
 u(0, z) &= 2 \cdot \mathbf{1}_{\{z \leq 0\}}(z) =: g(z), \quad (t, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

que es una ecuación del calor con constante de difusión σ y condición inicial discontinua. Por esto último, la convergencia de la solución a la condición inicial es *c.t.p.*

Nuevamente, la razón de que la condición inicial g sea discontinua es que la probabilidad de intersección al tiempo $t = 0$ es 0. Conforme t crece, dicha probabilidad aumenta hasta alcanzar el límite 1, como lo probamos en la Proposición 4.3.2. De manera análoga a lo realizado en la Subsección 3.3.3, podemos considerar equivalentemente el problema con condiciones de frontera de Dirichlet

$$\begin{aligned}
 \partial_t u - \sigma \partial_{zz} u &= 0, \\
 u(0, z) &= h(z) := \mathbf{1}_{\{z=0\}}, \quad (t, z) \in (0, \infty) \times [0, \infty). \\
 u(t, 0) &= 1,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En la Figura 4.2 podemos observar una realización de la intersección de dos trayectorias del MBG para ciertos valores de los parámetros (a), así como el histograma de múltiples realizaciones y la gráfica de la función de densidad de $\tau_{x,y}$ (b).⁴

Al haber 3,338 valores excedentes, tenemos que

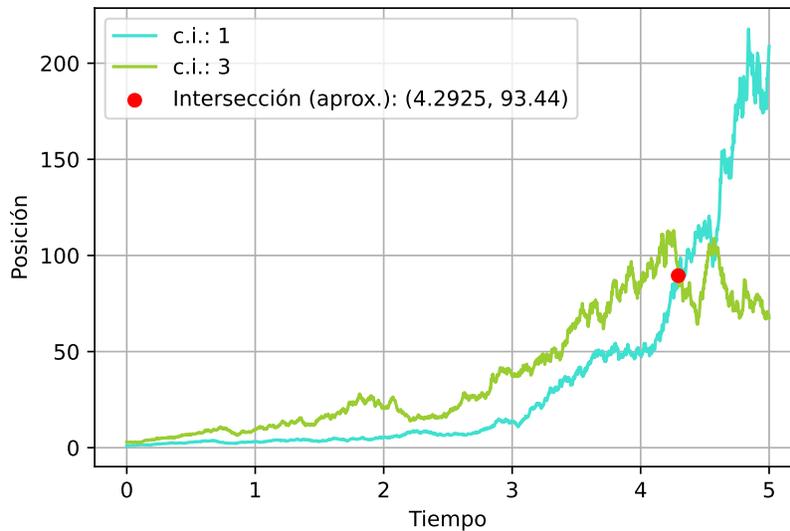
$$\mathbb{P}(\tau_{3,1} > 15) \approx 1 - \frac{3,338}{10,000} = 0.6662.$$

Por tanto, el error de aproximación a esta probabilidad calculando numéricamente la integral es

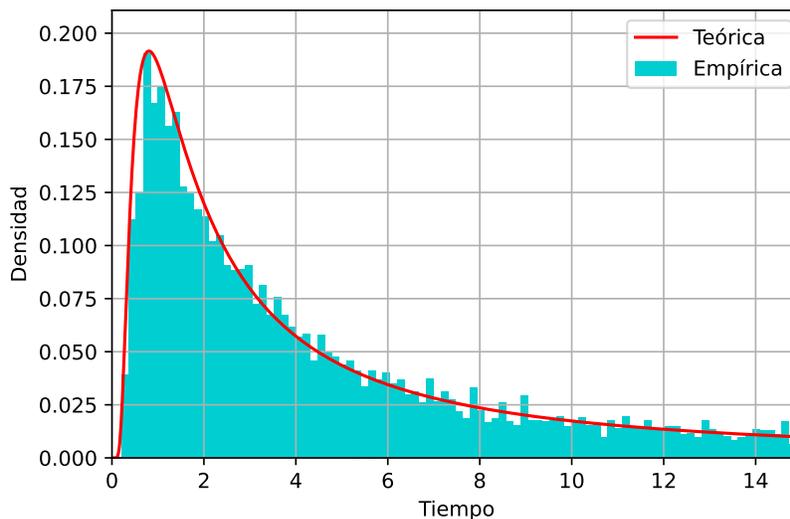
$$\epsilon = \left| 0.6662 - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{3}{0.5\sqrt{30}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) \right| \approx 0.06047832265654.$$

⁴Referirse al archivo `densidad.mbg.py`.

A pesar de ser aleatorio, este valor tiende a cero conforme el número de iteraciones y el número de pasos por trayectoria crecen.



(a) Intersección de movimientos brownianos geométricos.



(b) Histograma de intersecciones.

Figura 4.2: (a) Intersección de dos trayectorias del MBG con 1,000 pasos cada una, condiciones iniciales $x = 3$ y $y = 1$ y parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 0.5$.

(b) Densidad de la intersección entre dos trayectorias del MBG. 10,000 simulaciones, 1,000 pasos por trayectoria, condiciones iniciales $x = 3$ y $y = 1$, parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 0.5$ y tiempo máximo de simulación $t_0 = 10$. 3,338 valores excedentes.

4.4 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Este modelo fue propuesto por Leonard Ornstein (1880 – 1941) y George Uhlenbeck (1900 – 1988) para describir el movimiento errático de una partícula bajo efectos de fricción. No obstante, suele utilizarse en modelos de volatilidad estocástica en finanzas. En particular, los modelos de Schöbel-Zhu y Hull-White parten de variantes de esta EDE (ver [18, Secciones 8.1.1 y 11.3]).

Definición 4.4.1. Definimos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU) como aquel que es solución de la EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $x_0 \geq 0$ es la condición inicial y $\alpha, \sigma > 0$ son los parámetros.

Cálculo de la solución

Sean $\Theta(t, x) = -\alpha x$ y $\Gamma(t, x) = \sigma$. Las funciones Θ y Γ satisfacen las propiedades i) y ii) del Teorema 4.1.1, pues son lineales. Además, la condición inicial es constante y se satisface también la propiedad iii). Por tanto, la ecuación diferencial (4.13) tiene solución y es única. Calculemos el diferencial $d(X_t e^{\alpha t})$. Sea $Y_t = f(t, X_t) = X_t e^{\alpha t}$. La función f es de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , y las derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha x e^{\alpha t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Por la fórmula de Itô-Doebelin,

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dX_t \\ &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} (-\alpha X_t dt + \sigma dW_t) \\ &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt - \alpha e^{\alpha t} X_t dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t \\ &= \sigma e^{\alpha t} dW_t. \end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma integral,

$$\int_0^t df(s, X_s) = \int_0^t d(X_s e^{\alpha s}) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s,$$

de donde

$$X_s e^{\alpha s} \Big|_0^t = X_t e^{\alpha t} - x_0 = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

y obtenemos que

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s. \tag{4.14}$$

Proposición 4.4.1. Para el proceso X_t se cumple que $\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$.

Demostración. Utilizando las propiedades de la esperanza, tenemos que

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \mathbb{E} \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right).$$

La integral en cuestión es una integral de Itô, por lo que es una martingala y, en particular,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \mid \mathcal{F}_0 \right) = 0,$$

con lo que concluimos que $\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$. ■

En la Figura 4.3 podemos observar una trayectoria del proceso solución Y_t simulado con el método de Euler-Maruyama y la curva $\mathbb{E}(X_t)$.

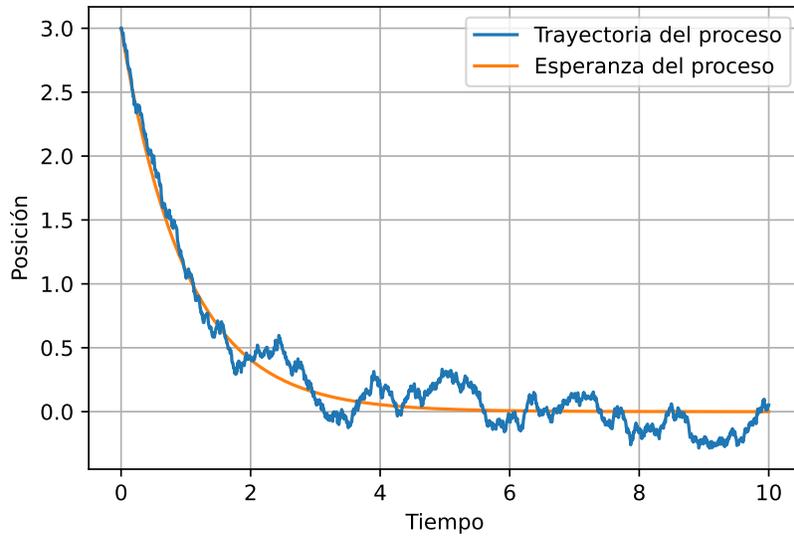


Figura 4.3: Trayectoria del proceso de OU con 2,000 pasos, $x_0 = 3$, $\alpha = 1$ y $\sigma = 0.25$.

Tiempo de intersección

Debido a que la esperanza del proceso (4.14) tiende asintóticamente a cero, podemos intuir el resultado enunciado a continuación:

Proposición 4.4.2. Sean $x, y \geq 0$, donde $x > y$ sin pérdida de generalidad. El tiempo de coalescencia entre dos trayectorias de procesos OU con condiciones iniciales x y y es finito c.s.

Para la demostración de esta proposición haremos uso del siguiente teorema:

Teorema 4.4.1. (Teorema de Dambis y Dubins-Schwarz). Si M_t es una \mathcal{F}_t -martingala local que se anula en cero y tal que $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$, y si tomamos

$$T_t = \inf \{s > 0 \mid \langle M, M \rangle_s > t\},$$

entonces $B_t = M_{T_t}$ es un movimiento browniano adaptado a \mathcal{F}_{T_t} y $M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}$.

La demostración de este resultado puede consultarse en [9, Teorema 1.6].

Demostración de la Proposición 4.4.2. Queremos ver que los procesos solución que comienzan en x y en y se intersecan en tiempo finito. En general, podemos reescribir a (4.14) y definir el proceso Y_t como sigue:

$$Y_t := \frac{X_t - xe^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} = \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW_s.$$

El proceso Y_t es una martingala, pues es una integral de Itô, y en particular es una martingala local. Además,

$$Y_0 = \int_0^0 \sigma e^{\alpha s} dW_s = 0,$$

por lo que Y_t se anula en $t = 0$. Por la Proposición 4.1.2, la variación cuadrática de Y_t está dada por

$$\langle Y, Y \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \sigma^2 \left. \frac{e^{2\alpha s}}{2\alpha} \right|_0^t = \sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}.$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\langle Y, Y \rangle_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} = \infty.$$

El proceso Y_t cumple con las hipótesis del Teorema 4.4.1, por lo que $Y_t = W_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}}$ es un movimiento browniano. Por tanto, las soluciones OU con condiciones iniciales x y y respectivamente pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} X_t^x &= xe^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} W_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}}, \\ X_t^y &= ye^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \widehat{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_t^x - X_t^y &= xe^{-\alpha t} - ye^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} W_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} - e^{-\alpha t} \widehat{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} \\ &= e^{-\alpha t} (x - y) + e^{-\alpha t} \left(W_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} - \widehat{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Sea $s = \sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}$ y definamos el nuevo movimiento browniano $\overline{W}_s = W_s - \widehat{W}_s$. En la Subsección 3.3.1 mostramos que la varianza de \overline{W}_s es $2s$. Así,

$$\overline{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} = W_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} - \widehat{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}}.$$

Sea

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} &= \inf \{ t > 0 \mid X_t^x - X_t^y \leq 0 \} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid e^{-\alpha t} (x - y) + e^{-\alpha t} \overline{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} \leq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid \overline{W}_{\sigma^2 \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}} \leq y - x \right\}. \end{aligned}$$

Por el principio de reflexión,

$$\mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) = 2\mathbb{P}\left(\overline{W}_{\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t} - 1}{\alpha}} \leq y - x\right).$$

Observemos que

$$Z := \frac{\overline{W}_{\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t} - 1}{\alpha}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t} - 1}{\alpha}}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

por lo que, equivalentemente, podemos trabajar con la probabilidad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) &= 2\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{y - x}{\sqrt{\frac{\sigma^2 e^{2\alpha t} - 1}{\alpha}}}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{\alpha}(x - y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\alpha}(x-y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Calculando el límite cuando el tiempo tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{\sqrt{\alpha}(x-y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1,$$

pues

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\alpha}(x - y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}} = 0.$$

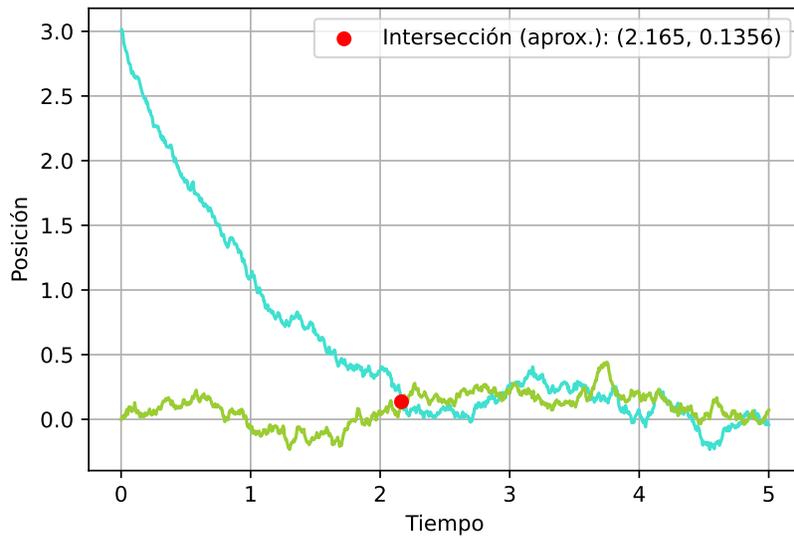
Por tanto, el tiempo de intersección de dos trayectorias de procesos de OU es finito *c.s.* ■

Derivando la integral en (4.16) respecto a t obtenemos la función de densidad de $\tau_{x,y}$:

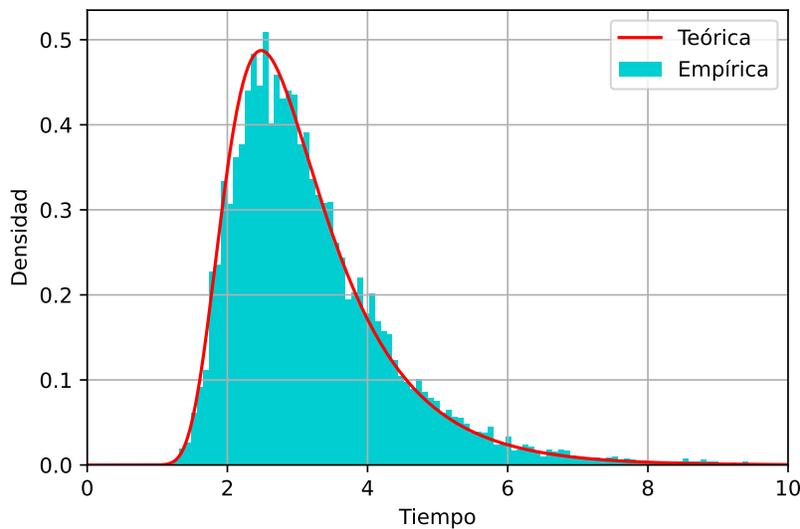
$$\begin{aligned} f_{\tau_{x,y}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\alpha}(x-y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha}(x-y)}{\sigma\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}\right)^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}(x - y) \sigma \frac{1}{2} (e^{2\alpha t} - 1)^{-1/2} e^{2\alpha t} 2\alpha}{\sigma^2 (e^{2\alpha t} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{2} \alpha^{3/2} (x - y) e^{2\alpha t}}{\sigma\sqrt{\pi} (e^{2\alpha t} - 1)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha(x-y)^2}{2\sigma^2(e^{2\alpha t} - 1)}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

La Figura 4.4 (a) muestra una realización de la colisión de dos trayectorias de OU para ciertos valores de los parámetros, mientras que en la (b) podemos visualizar un histograma de intersecciones contra la gráfica de la función $f_{\tau_{x,y}}$ en (4.17).⁵

⁵Referirse al archivo `densidad.ou.py`.



(a) Intersección de trayectorias del proceso de OU.



(b) Histograma de intersecciones.

Figura 4.4: (a) Intersección de dos trayectorias del proceso de OU con 1,000 pasos cada una, condiciones iniciales $x = 3$ y $y = 0$ y parámetros $\alpha = 1$ y $\sigma = 0.25$.

(b) Densidad de $\tau_{x,y}$. 10,000 simulaciones, 1,000 pasos por trayectoria, condiciones iniciales $x = 3$ y $y = 0$, parámetros $\alpha = 1$ y $\sigma = 0.25$ y tiempo máximo de simulación $t_0 = 10$. 9 valores excedentes.

La probabilidad numérica de no sobrepasar el tiempo máximo de simulación es

$$\mathbb{P}(\tau_{3,0} > 10) \approx 1 - \frac{9}{10,000} = 0.9991,$$

mientras que el error de aproximación al calcular numéricamente la integral es

$$\epsilon = \left| 0.9991 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{12}{\sqrt{e^{2(10)}-1}}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right| \approx 0.00046531223588.$$

Una vez más, sin pasar por alto que es aleatorio, ϵ tiende a cero conforme el número de iteraciones y el número de pasos por trayectoria crecen.

4.5 La difusión de Wright-Fisher

La difusión de Wright Fisher es una de las más importantes en genética de poblaciones. Existe una relación de dualidad⁶ entre esta difusión y el proceso de conteo del coalescente de Kingman definido en la Sección 2.3 (ver [11, Teorema 1.2.37]).

Consideremos la EDE mostrada a continuación:

$$\begin{aligned} dY_t &= \sqrt{Y_t(1-Y_t)} dW_t, \\ Y_0 &= y_0 \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

El proceso solución Y_t es la llamada difusión de Wright-Fisher (WF).

Observación: Para que el lado derecho de la ecuación esté bien definido en los números reales, debe suceder que $Y_t(1-Y_t) > 0$, de donde $Y_t > 0$ y $1-Y_t > 0$ ó $Y_t < 0$ y $1-Y_t < 0$. Como la condición inicial es positiva o cero, descartamos el segundo caso. Entonces $0 \leq Y_t \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Veamos que el proceso Y_t existe y es único como solución de (4.18):

- i) Sea $\Gamma(t, x) = \sqrt{x(1-x)}$ y sin pérdida de generalidad supongamos $x > y > 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Esto implica que $y^2 - x^2 < 0$. Por otro lado, como $x \in [0, 1]$ (por la observación anterior), entonces $\sqrt{x(1-x)} \leq x(1-x)$. De estas dos desigualdades obtenemos que

$$\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{y(1-y)} \leq x(1-x) - y(1-y) = x - x^2 - y + y^2 < x - y.$$

Análogamente, si $y > x$ entonces

$$\sqrt{y(1-y)} - \sqrt{x(1-x)} < y - x.$$

De aquí, $|\Gamma(t, x) - \Gamma(t, y)| \leq |x - y|$, por lo que se cumple la primera condición del Teorema 4.1.1 y la constante de Lipschitz encontrada es $K = 1$.

- ii) Definamos $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta(x) := \sqrt{x(1-x)}/(1+x)$. La función η es continua en un conjunto compacto, por lo que alcanza su máximo y su mínimo dentro del mismo. Además, es positiva o cero, con lo cual el mínimo se da en los puntos en los que la función se anula: $x = 0$ y $x = 1$. Derivando:

$$\eta'(x) = \frac{(1+x)^{1/2} (x(1-x))^{-1/2} (-x+1-x) - \sqrt{x(1-x)}}{(1+x)^2}.$$

⁶Decimos que dos procesos de Markov son duales si podemos obtener información de uno de ellos mediante la información que tenemos del otro.

Al resolver la ecuación $\eta'(x) = 0$ encontramos el punto crítico:

$$\begin{aligned} (1+x) \frac{1}{2} (x(1-x))^{-1/2} (1-2x) &= \sqrt{x(1-x)} \\ (1+x)(1-2x) &= 2x(1-x) \\ 1-2x+x-2x^2 &= 2x-2x^2 \\ x &= 1/3, \end{aligned}$$

y evaluando obtenemos que $\eta(1/3) = \sqrt{2}/4$. Éste es el máximo global de la función, pues $\eta(0) = \eta(1) = 0 < \sqrt{2}/4$. Por tanto, para todo $x \in [0, 1]$ ocurre que

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x} \leq \sqrt{2}/4,$$

de donde $\sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{2}/4(1+x)$ y tenemos que se satisface también la condición de crecimiento del teorema de existencia y unicidad.

iii) Por último, suponemos que y_0 es constante y la condición de cuadrado integrabilidad es inmediata.

En consecuencia, la solución de la ecuación (4.18) existe y es única.

La difusión de WF cuenta con la peculiaridad de que, dependiendo de la trayectoria del proceso solución,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = 1 \quad \text{ó} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = 0,$$

ya que si $Y_t \rightarrow 1$, entonces $Y_t(1-Y_t) \rightarrow 0$, y si $Y_t \rightarrow 0$ también ocurre que $Y_t(1-Y_t) \rightarrow 0$ (ver Figura 4.5). Así, conforme el proceso solución tiende a las fronteras 0 y 1 su dinámica se debilita. Debido a que no es posible encontrar una fórmula cerrada para la solución de (4.18), nos limitaremos a simularla y a estudiar numéricamente la intersección de sus trayectorias.

Observación: Podemos escribir la ecuación diferencial en forma integral como

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \sqrt{Y_s(1-Y_s)} dW_s,$$

de donde vemos que la difusión de WF es una martingala que comienza en y_0 .

Simulación del proceso

Es posible simular el proceso Y_t utilizando el método de Euler-Maruyama. Sin embargo, debido a la discretización de la EDE en la construcción de la fórmula del método y a que la solución verdadera está acotada, podemos tener el siguiente inconveniente en la computación: consideremos la ecuación (4.6) con $\Theta(t_i, Y_i) = 0$ y $\Gamma(t_i, Y_i) = (Y_i(1-Y_i))^{1/2}$. Así,

$$Y_{i+1} = Y_i + \sqrt{Y_i(1-Y_i)} \Delta W_i \tag{4.19}$$

debería aproximar una trayectoria del proceso solución. Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $Y_i = 1 - \epsilon$. Entonces

$$Y_{i+1} = 1 - \epsilon + \sqrt{(1-\epsilon)(1-(1-\epsilon))} \Delta W_i = 1 - \epsilon + \sqrt{(1-\epsilon)\epsilon} \Delta W_i.$$

Si

$$\sqrt{(1-\epsilon)\epsilon} \Delta W_i > \epsilon,$$

ocurriría que

$$Y_{i+1} > 1 - \epsilon + \epsilon = 1,$$

de donde $1 - Y_{i+1} < 0$ y el término $i+1$ dentro de la raíz en la ecuación (4.19) sería negativo, lo cual nos llevaría a que Y_{i+2} fuera un número complejo. Como queremos evitar esta situación, es posible definir $Y_k = 1$ para todo $k > i+1$ siempre que $Y_{i+1} > 1$. De manera completamente análoga podemos tratar el caso en el que la sucesión cruza la frontera 0 definiendo $Y_k = 0$ para todo $k > i+1$ cuando $Y_{i+1} < 0$. De esta forma el proceso estará siempre bien definido en los números reales.⁷

Observación: El hecho de que dos trayectorias con el mismo punto de partida puedan tener comportamientos asintóticos distintos implica que la colisión entre las mismas no siempre tendrá lugar.

Tiempo y altura de intersección

Nos interesa el caso en el que la intersección se da. Supongamos que \widehat{Y}_t y \overline{Y}_t son difusiones de WF con condiciones iniciales y_0 y y_1 respectivamente tales que $y_0 < y_1$ sin pérdida de generalidad. Aunque los valores $y = 0$ y $y = 1$ pueden ser condiciones iniciales de (4.18), no los tomamos pues:

- Si $Y_0 = 0$ entonces $dY_t = 0$ y
- si $Y_0 = 1$ entonces $dY_t = 0$,

por lo que en ambos casos la dinámica de la ecuación se ve anulada. Por esta razón, consideraremos $y_0, y_1 \in (0, 1)$.

Sea $X = (X_1, X_2)$ el vector aleatorio que modela la intersección entre las trayectorias de \widehat{Y}_t y \overline{Y}_t . La variable X_1 es la que describe el tiempo, mientras que X_2 , la altura. Entonces $\text{Sop}(X_1) = \mathbb{R}^+$ y $\text{Sop}(X_2) = [0, 1]$. No obstante, queremos estudiar las intersecciones dentro del intervalo $(0, 1)$ para que X_2 sea una variable continua (pues en principio es mixta) y podamos mostrar su densidad. Por otro lado, debemos establecer un tiempo máximo de simulación t_0 , por lo que es necesario truncar el soporte de X_1 . En consecuencia, aproximaremos la densidad de X condicionada a que la intersección se produzca antes de t_0 y dentro del intervalo espacial $(0, 1)$; es decir, no tomaremos en cuenta las intersecciones exteriores ni las que pudieran haber ocurrido después de t_0 . Por tanto, buscaremos aproximar la densidad de

$$\overline{X}_{t_0} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2) = X \mid \left\{ \widehat{Y}_t, \overline{Y}_t \in (0, 1) \right\} \cap \{t \leq t_0\}.$$

Definiremos una variable aleatoria auxiliar a la que llamaremos I . Ésta indicará si la intersección se produjo o no y el evento asociado al caso favorable estará denotado por 1, mientras que el complemento tendrá asignado al 0. Entonces $I \sim \text{Ber}(p)$, donde p es el

⁷Para la implementación de esta modificación, referirse al archivo `difusion.wf.py`.

4.5. LA DIFUSIÓN DE WRIGHT-FISHER

parámetro que deseamos estimar: la proporción de veces que las trayectorias se intersecaron en el interior antes de t_0 ,

$$\mathbb{P}\left(\widehat{Y}_t = \bar{Y}_t \mid \bar{Y}_t \in (0, 1), t \leq t_0\right) = \mathbb{P}(I = 1) = p.$$

Nota: Dada la situación en que la colisión se produzca en alguna de las fronteras (a lo cual llamaremos intersección exterior), sí podemos encontrar el punto "exacto" de choque y es justamente el primer tiempo en que las trayectorias valen 0 o 1 simultáneamente, pero por lo argumentado anteriormente omitiremos estos casos.

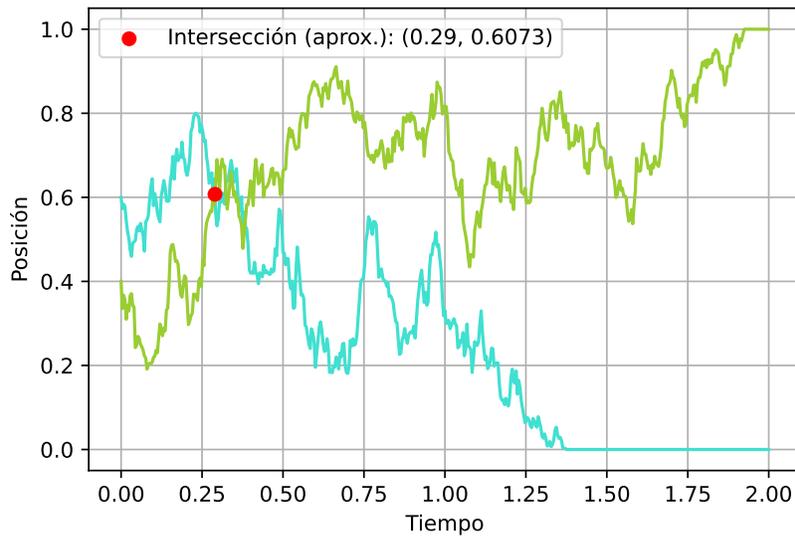


Figura 4.5: Intersección de dos trayectorias de la difusión de WF con 300 pasos y condiciones iniciales 0.6 y 0.4.

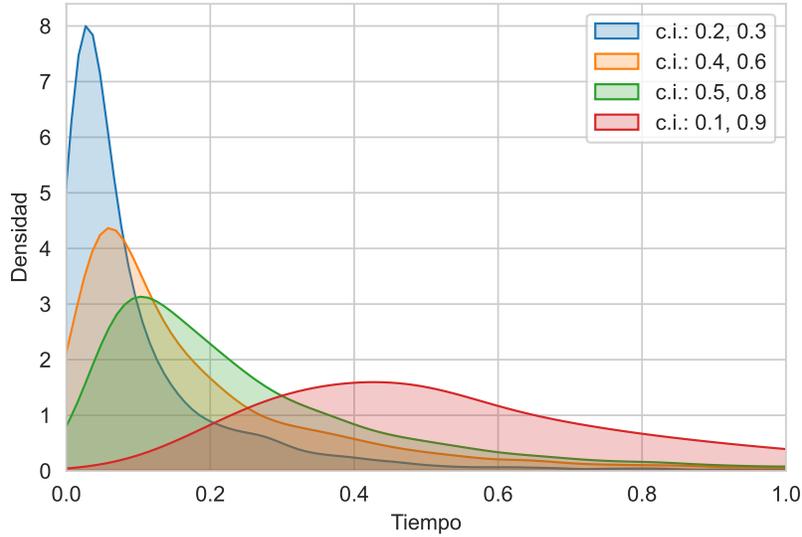
A partir de simular 10,000 veces y establecer $t_0 = 2$ obtuvimos las siguientes tasas de aceptación, las cuales son una aproximación al parámetro p de I para trayectorias con diferentes condiciones iniciales:

Condiciones iniciales	Valores interiores	Tasa de aceptación
0.2, 0.3	7,336	0.7336
0.4, 0.6	6,641	0.6641
0.5, 0.8	4,670	0.467
0.1, 0.9	491	0.0491

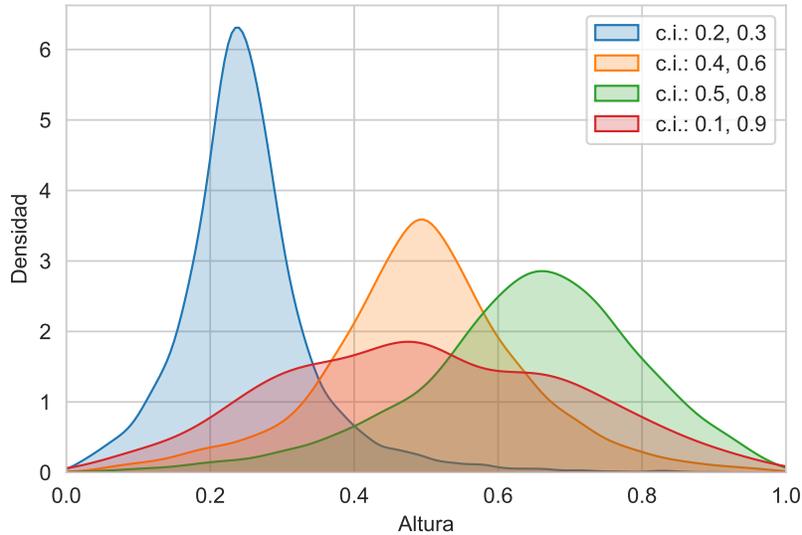
En la Figura 4.6 podemos ver las densidades empíricas⁸ correspondientes a las variables aleatorias X_1 y X_2 .

⁸Para los códigos utilizados para simular las figuras en esta subsección, referirse al archivo `interseccion.wf.py`. Para efectos de visualización, los histogramas fueron suavizados vía el método de estimación de kernel gaussiano (KDE) con el factor de Scott. Ver, por ejemplo, [20, Sección 20.3].

Nota: En la Figura 4.6 (a) el valor de cada curva al tiempo $t = 0$ es positivo, lo cual es una imprecisión que se debe a la suavización. Similarmente, las curvas en los extremos del intervalo en (b) también deben valer 0. Este error no está exento de ocurrir si tomamos histogramas en su lugar.



(a) Tiempo de intersección.



(b) Altura de intersección.

Figura 4.6: Densidades marginales de \bar{X}_{t_0} , $t_0 = 2$ para diferentes condiciones iniciales. Cada curva fue generada a partir de simular 10,000 veces.

De la Figura 4.6 (b) notemos que, en todos los casos, la media de la función de densidad es el punto medio entre las condiciones iniciales. No obstante, conforme éstas se separan la varianza aumenta, así como la tasa de aceptación disminuye (ver la tabla anterior).

4.6 Los coalescentes

A continuación propondremos una forma de simular la coalescencia de un número finito de trayectorias de los procesos desarrollados en este capítulo.

En las secciones previas, probamos que

- el tiempo de intersección entre cualesquiera dos trayectorias del proceso OU es finito *c.s.* si las condiciones iniciales se encuentran en $[0, \infty)$ y
- el tiempo de intersección entre cualesquiera dos trayectorias del proceso MBG es finito *c.s.* si las condiciones iniciales se encuentran en $(0, \infty)$.

Las viñetas anteriores implican que si consideramos un número finito de trayectorias coalescentes de cada proceso en un subintervalo adecuado, el tiempo de última coalescencia será finito *c.s.*, pues todos los pares de trayectorias se intersecarán con probabilidad 1. En cambio, la última coalescencia en el caso del coalescente de difusiones de WF tenderá a no ocurrir conforme tomamos cada vez más condiciones iniciales equidistantes entre sí en el intervalo $(0, 1)$.

Para la simulación debemos tener en cuenta lo siguiente: a diferencia del algoritmo de la Sección 3.3 que consistió en generar las trayectorias una a una de izquierda a derecha, con los procesos de Itô no es conveniente tomar siempre una de las trayectorias como camino a seguir una vez que se produjo la intersección, pues no cumplen la propiedad de simetría (hay una tendencia en las trayectorias) y simular de esta manera, a la que llamamos propiedad de mirar hacia la derecha (izquierda, arriba o abajo, dependiendo de la orientación del coalescente), llevaría a resultados sesgados al trabajar con el tiempo de última coalescencia. En consecuencia, esta variable aleatoria no necesariamente depende de las trayectorias en los extremos para los ejemplos desarrollados en este capítulo.

Para evitar caer en el sesgo proponemos la siguiente forma de generar el coalescente de cada proceso. Consideraremos un intervalo adecuado para fijar las condiciones iniciales. Luego, estableceremos una jerarquía que estará dada por el orden en que escojamos a cada una de ellas y dictará la prioridad de seguir cada trayectoria después de la intersección. Por ejemplo, si la primer condición inicial elegida es x_0 , todas las trayectorias independientes que en algún momento choquen con la que comienza en este valor la seguirán subsecuentemente. El segundo orden de prioridad se le asignará a la segunda condición inicial escogida y así sucesivamente hasta agotarlas todas. A esto lo llamamos orden de precedencia ([1, Pág. 28]):

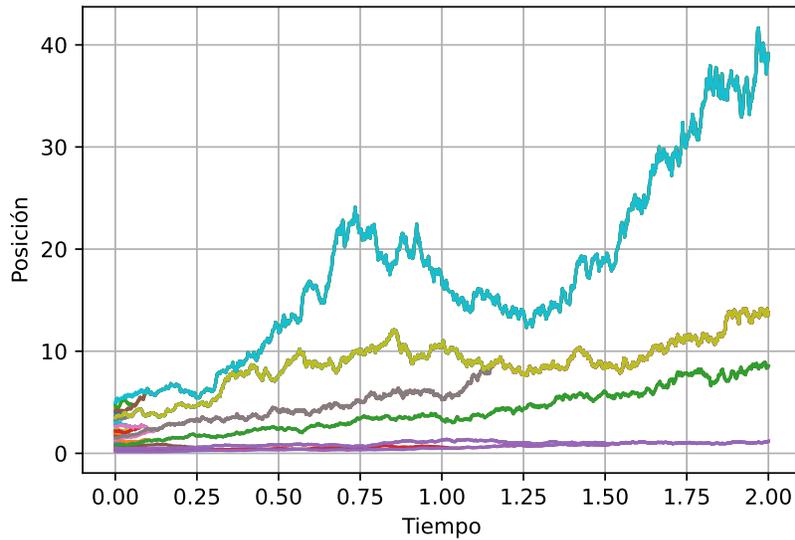
$$\Sigma_n := \{ \sigma \mid \sigma \text{ es una permutación de } \{1, 2, \dots, n\} \}.$$

Dada $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma(1)$ es el índice con mayor orden de prioridad y así sucesivamente hasta $\sigma(n)$, que representa el índice con menor orden de prioridad. Si la primera colisión involucra a las trayectorias con índices i y j , comparamos $\sigma^{-1}(i)$ y $\sigma^{-1}(j)$ y si $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$, entonces i tiene un orden de prioridad más alto y ambas trayectorias siguen la trayectoria i .

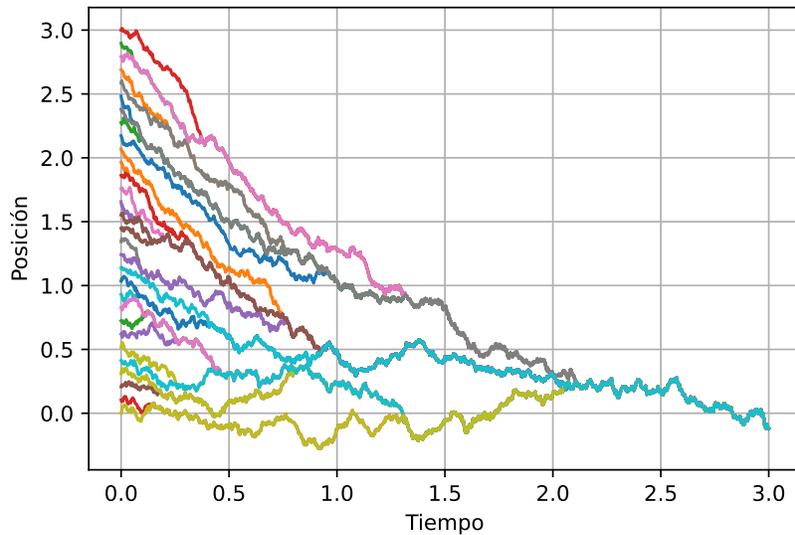
Tomaremos $\sigma \in \Sigma_n$ tal que σ es aleatoria. Haciendo uso de que las condiciones iniciales son finitas, escogeremos una a una uniformemente, evidentemente sin reemplazo, y aplicaremos el orden de precedencia como definido en el párrafo anterior. Notemos que el tiempo de última coalescencia aún estará determinado por la intersección de dos trayectorias; sin embargo, a priori no es posible saber cuáles, pues propusimos un orden aleatorio. Aún así, el siguiente enunciado nos dice que la distribución del coalescente es invariante bajo permutaciones:

Proposición 4.6.1. *Dada una regla de colisión γ^c como en la Definición 2.1.1, la distribución de la variable aleatoria γ^c es la misma para cada biyección $\sigma \in \Sigma_n$.*

Este resultado es consecuencia de la propiedad fuerte de Markov, la cual cumplen los procesos de Feller (y, en particular, los de Itô). Para consultar la demostración de la Proposición 4.6.1, referirse a [21, Lema 2.1]. A continuación se muestra una figura (Figura 4.7) con los tres coalescentes⁹ y el pseudocódigo general asociado. A partir de seguir las trayectorias invirtiendo el tiempo (de derecha a izquierda) y observar los puntos de intersección, podríamos rastrear el orden de precedencia aleatorio generado por el algoritmo, siempre y cuando se observe la última coalescencia.

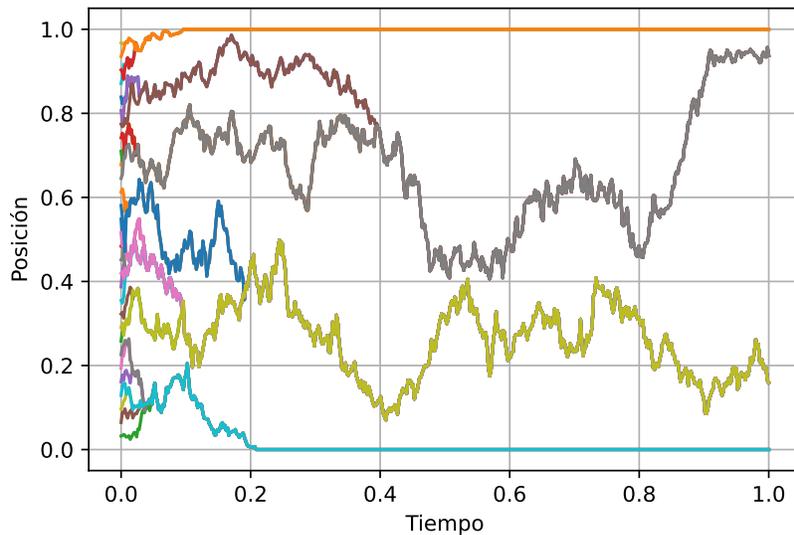


(a) Trayectorias del MBG: $\mu = 1, \sigma = 0.5$.



(b) Trayectorias del proceso de OU: $\alpha = 1, \sigma = 0.25$.

⁹Referirse a los archivos `coalescente_mbg.py`, `coalescente_ou.py` y `coalescente_wf.py`.



(c) Trayectorias de la difusión de Wright-Fisher.

Figura 4.7: Coalescentes de los procesos desarrollados en este capítulo. Cada uno consta inicialmente de 30 trayectorias.

Notas: a) El parámetro x_0 en el pseudocódigo es utilizado o no dependiendo de cada proceso. Por ejemplo, para el coalescente de trayectorias de WF no lo tomamos en cuenta puesto que el intervalo de condiciones iniciales es siempre $(0, 1)$. En este caso, creamos la partición en el intervalo $[0, 1]$ con $k + 2$ elementos y excluimos los de los extremos, quedándonos así con la lista *particion* de tamaño k .

b) Con valores inalcanzables nos referimos a aquellos que no pueden ser tomados por las trayectorias. Como ejemplo, los valores 2 y -1 son inalcanzables para la difusión de WF. En el caso del MBG, podemos tomar como valores inalcanzables el -1 para la lista *trayectoria_inf* y el máximo número de tipo entero posible para la lista *trayectoria_sup*, pues sus trayectorias no están acotadas superiormente. Recomendamos elegir valores inalcanzables adecuados, los cuales dependerán en algunos casos de la varianza que cada proceso y del tiempo máximo de simulación.

Pseudocódigo 8 Coalescentes de procesos de Itô

Nota: Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista.

Entrada: $k \in \mathbb{Z}^+$: número de trayectorias; $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos por trayectoria; $t_{\max} \in \mathbb{R}^+$: tiempo máximo del intervalo de tiempo; $x_{\max} \in \mathbb{R}^+$: máxima condición inicial; Θ, Γ : coeficientes de deriva y difusión del método de Euler-Maruyama.

Inicializar: *registro*: matriz vacía de tamaño $k \times n$; *particion*: partición del intervalo de condiciones iniciales con k elementos (ver la nota fuera del cuadro); *indices* := $\{0, 1, \dots, k - 1\}$.

Hacer una permutación aleatoria de *indices* y renombrar *indices* a esta nueva lista.

for $i \in \text{indices}$ **do**

Generar una lista *trayectoria* con el método de Euler-Maruyama (Pseudocódigo 6).

Definir las listas *trayectoria_sup* y *trayectoria_inf* con valores inalcanzables (ver la nota fuera del cuadro), ambas de tamaño k .

Recorrer la primera columna de la matriz *registro*. Si algún valor antes del i -ésimo es no vacío, definir *trayectoria_sup* como ese renglón. Si algún valor después del i -ésimo es no vacío, definir *trayectoria_inf* como ese renglón. De esta manera se actualizan las trayectorias superior e inferior con las cuales comparar *trayectoria*.

for $j \in \{1, 2, \dots, |\text{trayectoria}| - 1\}$ **do**

if $\text{trayectoria}(j) < \text{trayectoria_inf}(j)$ **then**

$\text{trayectoria}(s) := \text{trayectoria_inf}(s) \quad \forall s \in \{j + 1, \dots, n\}$

break

else if $\text{trayectoria}(j) > \text{trayectoria_sup}(j)$ **then**

$\text{trayectoria}(s) := \text{trayectoria_sup}(s) \quad \forall s \in \{j + 1, \dots, n\}$

break

$\text{registro}(k - 1 - i, t) := \text{trayectoria}(t) \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Graficar la trayectoria generada. Mostrar hasta que i haya recorrido todos los elementos en *indices*.

Salida: Figura

Capítulo 5

Movimientos brownianos con banco de semillas

En este capítulo definiremos un proceso estocástico al que llamaremos movimiento browniano con banco de semillas. Enseguida, estableceremos el coalescente asociado a un conjunto finito de trayectorias, siendo que la coalescencia entre las mismas sigue una regla especial que no hemos tratado en los capítulos anteriores, y lo simularemos. Finalmente, mostraremos algunos histogramas asociados al tiempo de última coalescencia.

Supongamos que contamos con un movimiento browniano el cual anula por completo su dinámica al tiempo t_1 y la reanuda al tiempo $t_2 > t_1$, vuelve a anularla al tiempo $t_3 > t_2$ y la reanuda de nuevo al tiempo $t_4 > t_3$ y así sucesivamente; es decir, el proceso se vuelve constante en los intervalos de tiempo $[t_1, t_2], [t_3, t_4], \dots$, cuyas longitudes están dadas por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (típicamente exponenciales para contar con la propiedad de Markov). A esta propiedad de un proceso estocástico de poder "dormir" la llamamos propiedad de banco de semillas, y sirve para modelar la genealogía de ciertas especies que pueden dejar descendencia varias generaciones en el futuro. Así, dos linajes migran por generaciones antes de que se encuentren en una misma y la coalescencia ocurra [2]. En este sentido, un proceso en estado de latencia puede representar, por ejemplo, la trayectoria de un individuo que deja un huevo del cual nacerá su descendiente o un conjunto de semillas en la tierra que más adelante darán vida a un nuevo árbol.

5.1 Definición del proceso

Queremos construir un movimiento browniano que anule su dinámica cada cierto tiempo aleatorio. Para ello definiremos un proceso que conlleve la información de dicho movimiento browniano, siendo que la varianza sea ϕ_t cuando queramos que esté despierto y 0 cuando queramos que esté dormido. Utilizaremos procesos de renovación para esta construcción.

Definición 5.1.1. Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias T_1, T_2, \dots llamadas tiempos de interarribo, que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. Asimismo, definimos el proceso de conteo de renovaciones al tiempo t como la variable aleatoria

$$M_t = \max \{n \geq 0 \mid T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t\},$$

5.1. DEFINICIÓN DEL PROCESO

con $M_t = 0$ si $t < T_1$.

Consideremos las variables aleatorias independientes $E_i \sim \exp(\alpha)$ y $F_i \sim \exp(\beta)$, con $i \in \mathbb{Z}^+$. Tomemos $T_i = E_i + F_i$ y

$$M_t = \max \{n \geq 0 \mid T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t\}.$$

Procederemos a construir el proceso auxiliar ϕ_t como sigue. Tiene trayectorias continuas, crece como la identidad durante los tiempos exponenciales E_i y se mantiene constante durante los tiempos F_i (ver la Figura 5.1).¹ Entonces ϕ_t está dado por la regla siguiente:

$$\phi_t = \begin{cases} t - \sum_{j=1}^{M_t} F_j, & \text{si } T_{M_t} \leq t < T_{M_t} + E_{M_t+1}; \\ \sum_{j=1}^{M_t} E_j, & \text{si } T_{M_t} + E_{M_t+1} \leq t < T_{M_t+1}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Observaciones:

- La altura del proceso ϕ_t hasta el tiempo t tiene distribución Erlang (M_t, α) , pues está dado por una suma de exponenciales con el mismo parámetro.
- Directamente de la definición de las variables T_i y M_t , ϕ_t es un proceso de renovación.

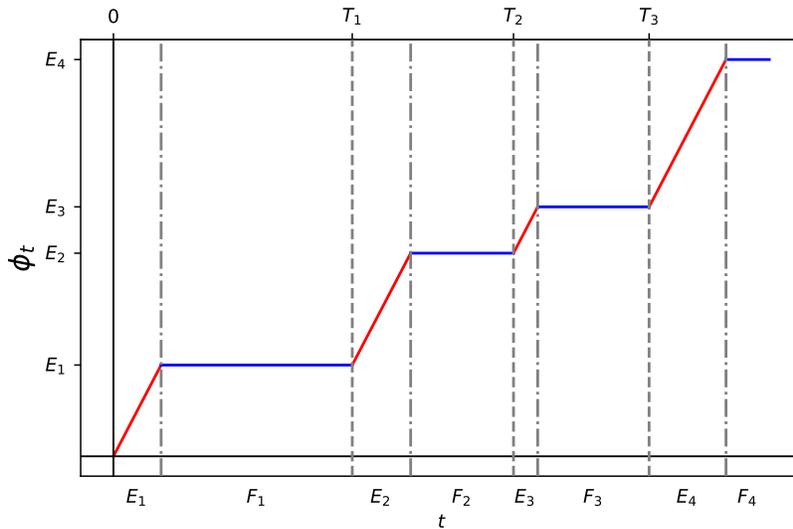


Figura 5.1: Trayectoria del proceso ϕ_t con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

Definición 5.1.2. Sea W_t un movimiento browniano. El movimiento browniano con banco de semillas (MBBS) es la composición W_{ϕ_t} .

¹Para su simulación, referirse al archivo `phi.py`.

La definición anterior establece que el MBBS se moverá como movimiento browniano estándar en los intervalos en los que ϕ_t sea estrictamente creciente, mientras que no se moverá (tendrá varianza nula) en los intervalos en los que ϕ_t sea constante. En la Figura 5.2 podemos observar una trayectoria del proceso W_{ϕ_t} , donde cada color representa una renovación.

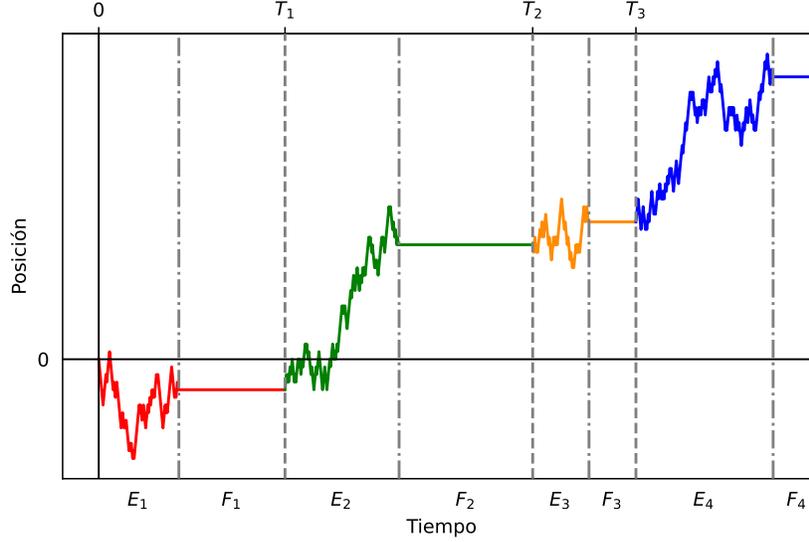


Figura 5.2: Trayectoria del proceso W_{ϕ_t} con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Para su simulación utilizamos el Pseudocódigo 9.

5.2 Simulación del MBBS

Podemos simular un MBBS utilizando el escalamiento usual² del teorema de Donsker y generando valores pseudoaleatorios con distribución exponencial para definir los tiempos de interarribo, como lo hicimos para producir la Figura 5.2. Empero, para simular el coalescente de MBBS, el reescalamiento de la Sección 1.3 es indispensable. En las secciones anteriores donde generamos movimientos brownianos estándar bastaba considerar caminatas aleatorias pertenecientes al conjunto $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$, pero para incluir la propiedad de banco de semillas en la simulación haremos uso también del espacio $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$:

$$\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2 := \left\{ (x, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + n \text{ es impar} \right\}.$$

En los intervalos en los que las caminatas se encuentren activas continuaremos con la técnica de simulación en el conjunto $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$, mientras que cuando se inactiven entrarán en el conjunto $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$. La convergencia de la caminata aleatoria al movimiento browniano en los intervalos en los que se encuentra despierta la argumentamos en el Capítulo 1. No debemos preocuparnos por los intervalos en los que la caminata está dormida, pues el proceso es constante en ellos y siempre converge.

Sean p_1 la probabilidad de dormir y p_2 la probabilidad de despertar en cada paso. Si una caminata se encuentra en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$, pasará a $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$ con probabilidad p_1 , y si está en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$, pasará a $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ con probabilidad p_2 . Esto implica los siguientes aspectos:

²Referirse al archivo `mbbs_esc_usual.py`.

- i) Estando en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ la caminata debe realizar una corrección para entrar en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$, y estando en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$ debe realizar otra para entrar en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$. En ambos casos estas correcciones consisten en dar un paso de tamaño 1.
- ii) Una vez que la caminata se encuentra en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$, se mueve verticalmente dando pasos de tamaño 2, pues un paso de tamaño 1 significaría caer nuevamente en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$.
- iii) Dado que los pasos en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$ son dobles, la probabilidad de despertar debe también duplicarse internamente en el algoritmo para que si $p_1 = p_2$ entonces los intervalos de actividad e inactividad tengan, en promedio, la misma longitud.

En términos de simulación, si $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ es generado en cada paso, entonces la caminata se mantendrá activa siempre que $u < 1 - p_1$ y, análogamente, se mantendrá inactiva mientras $u < 1 - 2p_2$. Observemos que si $p_2 \geq 1/2$ entonces esta última desigualdad nunca se cumple, lo cual significa que la caminata no se mantiene en $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$: entrará a este conjunto pero saldrá inmediatamente de él realizando las correcciones del inciso i). En resumen:

- Si la trayectoria se encuentra en $(n, x) \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2$, se desplaza
 - a $(n + 1, x + 1)$ con probabilidad $\frac{1}{2}(1 - p_1)$,
 - a $(n + 1, x - 1)$ con probabilidad $\frac{1}{2}(1 - p_1)$,
 - a $(n + 1, x)$ con probabilidad p_1 .
- Si la trayectoria se encuentra en $(n, x) \in \mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$, se desplaza
 - a $(n + 2, x)$ con probabilidad $1 - 2p_2$,
 - a $(n + 1, x)$ con probabilidad $2p_2$.

A continuación argumentaremos la convergencia de p_1 y p_2 a los parámetros α y β de la definición del proceso ϕ_t .

Proposición 5.2.1. *La longitud de cada intervalo de tiempo en el que una trayectoria del MBBS se encuentra dormida (análogamente, despierta) tiene distribución exponencial conforme $n \rightarrow \infty$ en el escalamiento alternativo.*

Demostración. Sea X la variable aleatoria del número de pasos que da la caminata antes de despertar utilizando la forma de simulación del escalamiento alternativo. Entonces X tiene distribución geométrica desplazada una unidad a la derecha, pues consideramos el número de ensayos antes del primer éxito (que es cuando la caminata despierta) el cual ocurre con probabilidad p , es decir,

$$X \sim 1 + Y, \text{ donde } Y \sim \text{Geo}(p).$$

Sea $y \in \mathbb{Z}^+$. Si en lugar de considerar pasos de tamaño 1 los tomamos de tamaño $1/n$, entonces requerimos de n pasos para alcanzar el mismo tiempo y . Continuando con este razonamiento, sea $z = ny$ el número de pasos con el reescalamiento. Bajo este cambio de variables la probabilidad de éxito debe ser también menor en cada paso, por lo que definimos $q = \lambda/N$ (de manera que λ depende linealmente de p) con $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\lambda/N \leq 1$. Así, la

variable aleatoria reescalada X^* tiene distribución $1 + \text{Geo}(q)$ y toma valores en el conjunto $\{0, N, 2N, \dots\}$. Por consiguiente, la función de distribución de Y^* es

$$F_{Y^*}(z) = 1 - (1 - q)^z = 1 - (1 - \lambda/n)^{ny}, \quad n > N.$$

Consideremos la sucesión $\{F_n(y)\}_{n=1}^\infty$, $F_n(y) = 1 - (1 - \lambda/n)^{ny}$ y observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - (1 - \lambda/n)^{ny}\right) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

La última expresión corresponde a la función de distribución de una variable aleatoria exponencial E con parámetro λ , con lo cual concluimos que $Y^* \xrightarrow{d} E$ conforme $n \rightarrow \infty$. ■

En consecuencia, el tiempo que una trayectoria se encuentra dormida antes de despertar por primera vez tiene distribución exponencial con parámetro α . Análogamente, el tiempo que una trayectoria se encuentra despierta antes de dormir por primera vez tiene distribución exponencial con parámetro β . Esto prueba que el escalamiento alternativo de la Sección 1.3 es consistente para el MBBS.

En la Figura 5.3 se muestra una trayectoria del MBBS utilizando el escalamiento browniano alternativo.³ Observemos que el comportamiento cualitativo de la trayectoria es similar al que muestra con el escalamiento usual en la Figura 5.2.

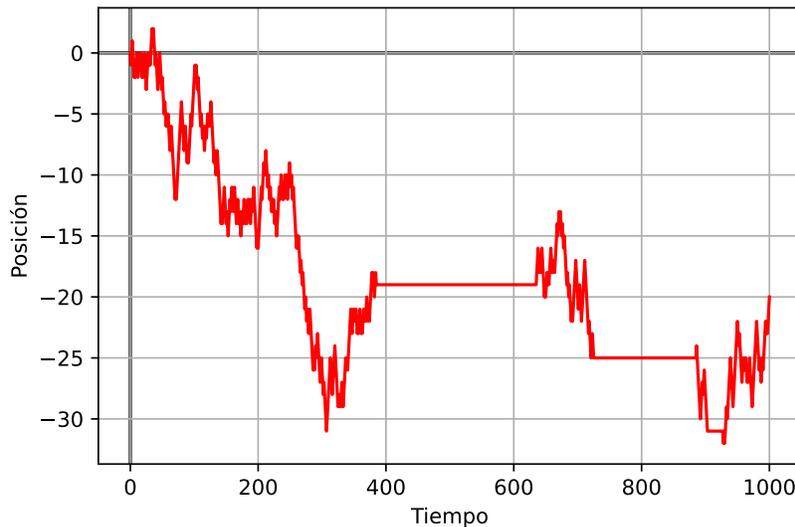


Figura 5.3: Trayectoria del proceso W_{ϕ_t} con parámetros $p_1 = 0.01$ y $p_2 = 0.01$. Para su simulación utilizamos el Pseudocódigo 10.

³Referirse al archivo `mbbs_esc_alt.py`.

Pseudocódigo 9 MBBS: escalamiento browniano usual

Notas: a) El índice -1 representa el último elemento de una lista. b) Numpy utiliza la esperanza de la distribución exponencial como parámetro de la misma.

Entrada: $\alpha, \beta > 0$; *renovaciones* $\in \mathbb{Z}^+$: número de renovaciones (la última sin completarse); $n \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos.

Inicializar: *tiempos* := {}.

for $i \in \{1, 2, \dots, \text{renovaciones} - 1\}$ **do**

$t_\alpha \sim \exp(\alpha)$; $t_\beta \sim \exp(\beta)$

Agregar t_α y t_β a *tiempos*

Inicializar: *tiempos_acum* := $\sum\{\text{tiempos}\}$ (lista de sumas acumuladas); *particion*: partición del intervalo $[0, \text{tiempos}(-1)]$ con n pasos; *valores* := {0}; $t := 0$; *tiempo* := *particion*(t); $j := 0$.

for $i \in \{0, 1, \dots, \text{renovaciones} - 1\}$ **do**

$j := j + 1$

while *tiempo* < *tiempos_acum*($j - 1$) **do**

$u \sim \mathcal{U}(0, 1)$

if $u \leq 1/2$ **then**

valor := *valores*(-1) $- 1/\sqrt{n}$

else

valor := *valores*(-1) $+ 1/\sqrt{n}$

Agregar *valor* a *valores*

$t := t + 1$

tiempo = *particion*(t)

$j := j + 1$

while *tiempo* < *tiempos_acum*($j - 1$) **do**

Agregar *valores*(-1) a *valores*

$t := t + 1$

tiempo := *particion*(t)

Graficar *particion* contra *valores*

Salida: *valores*

Pseudocódigo 10 MBBS: escalamiento browniano alternativo

Nota: Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista.

Entrada: $t_{max} \in \mathbb{Z}^+$: número de pasos (tiempo total); $p_1 \in [0, 1]$: prob. despertar; $p_2 \in [0, 1]$: prob. dormir.

Inicializar: $valores := \{0\}$; $valor := 0$; $tiempos := \{0, 1, \dots, t_{max}\}$.

```

while  $|valores| \leq t_{max}$  do
   $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ 
  if  $u \leq (1 - p_1) / 2$  then
     $valor := valor - 1$ 
    Agregar  $valor$  a  $valores$ 
  else if  $u \leq 1 - p_1$  then
     $valor := valor + 1$ 
    Agregar  $valor$  a  $valores$ 
  else
     $valor := valor$ 
    Agregar  $valor$  a  $valores$ 
     $continuar := \text{TRUE}$ 
    while  $continuar = \text{TRUE}$  and  $|valores| \leq t_{max}$  do
       $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ 
      if  $u \leq 1 - p_2$  then
        Dos veces agregar  $valor$  a  $valores$ 
      else
        Agregar  $valor$  a  $valores$ 
         $continuar := \text{FALSE}$ 

```

Truncar $valores$ para que tenga $t_{max} + 1$ entradas, por si excedió este número (esto puede ocurrir debido a los saltos dobles que da la caminata cuando se encuentra dormida).

Graficar $tiempos$ contra $valores$

Salida: $valores$

5.3 La regla de coalescencia

A diferencia de todos los ejemplos de trayectorias coalescentes desarrollados a lo largo de esta tesis, para el caso del MBBS la intersección de dos trayectorias no necesariamente implica la coalescencia de las mismas. Consideraremos que dos de estos procesos \overline{W}_t y \widehat{W}_t coalescen siempre que $\overline{W}_t = \widehat{W}_t$ y ambos se encuentren dormidos o despiertos; por lo que la intersección de una trayectoria activa con una inactiva no produce coalescencia; por el contrario, cada una de ellas seguirá su curso de manera independiente.

Los procesos desarrollados en el Capítulo 4 tenían el inconveniente de la ausencia de la simetría, por lo que fue necesario definir otro orden de precedencia. En cambio, los MBBS recuperan dicha propiedad de los movimientos brownianos que parten de la recta; esto es, cuando dos trayectorias del MBBS despiertas chocan, la trayectoria coalescente puede seguir cualquiera de las originales. En consecuencia podemos, tal y como hicimos en el Capítulo 3, simular las trayectorias de izquierda a derecha o viceversa. Desde luego, la única manera en que dos trayectorias dormidas pueden coalescer es si una de ellas se duerme justamente cuando toma el mismo valor de otra que, de antemano, lo está. En la teoría esto no ocurre, puesto que la probabilidad de que una trayectoria del MBBS se duerma exactamente cuando toma un valor fijo es cero. Sin embargo, computacionalmente esto pasa debido al escalamiento alternativo y a la discretización del tiempo y del espacio.

En el algoritmo desarrollado en el Capítulo 3, bastaba verificar que la n -ésima trayectoria no chocara con la anterior para determinar si la coalescencia se produjo o no. En el coalescente que nos interesa ahora no podemos hacer esto, pues las intersecciones pueden producirse entre caminatas que no son contiguas. La programación de este coalescente requiere entonces almacenar todas las trayectorias simuladas antes de la n -ésima y no únicamente la anterior. Por supuesto, esto causa que el algoritmo sea más lento.

Para la simulación del coalescente haremos una pequeña modificación al Pseudocódigo 10: añadiremos dos vectores, llamados *dormido* y *despierto*, que serán inicializados en el punto de comienzo de la caminata. Es decir, si queremos que el MBBS comience en $j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, entonces $valores = \{j\}$, $dormido = \{j\}$ y $despierto = \{j\}$. En cada iteración, se agregará el valor actualizado de la variable *valor* a cada una de las nuevas listas de acuerdo con la regla siguiente:

- a la lista *despierto* en formato numérico una sola vez si la caminata se encuentra despierta y en formato caracter dos veces si la caminata se encuentra dormida;
- a la lista *dormido* en formato numérico dos veces si la caminata se encuentra dormida y en formato caracter una sola vez si la caminata se encuentra despierta.

El objetivo de los puntos anteriores es garantizar que al finalizar la simulación del MBBS las tres listas tengan la misma longitud. La utilidad de esto será que podremos trabajar con muchas trayectorias del MBBS, siendo que la condición de que sigan la misma trayectoria después de la intersección se cumplirá cuando los datos comparados entrada a entrada en las listas sean ambos de tipo numérico. Esta modificación del algoritmo es suficiente para poner en práctica la regla de coalescencia descrita arriba tomando en cuenta cada uno de sus puntos. Inicializaremos todos los vectores con variables numéricas, pero las trayectorias nunca se intersecarán al tiempo cero pues comienzan todas en puntos distintos.

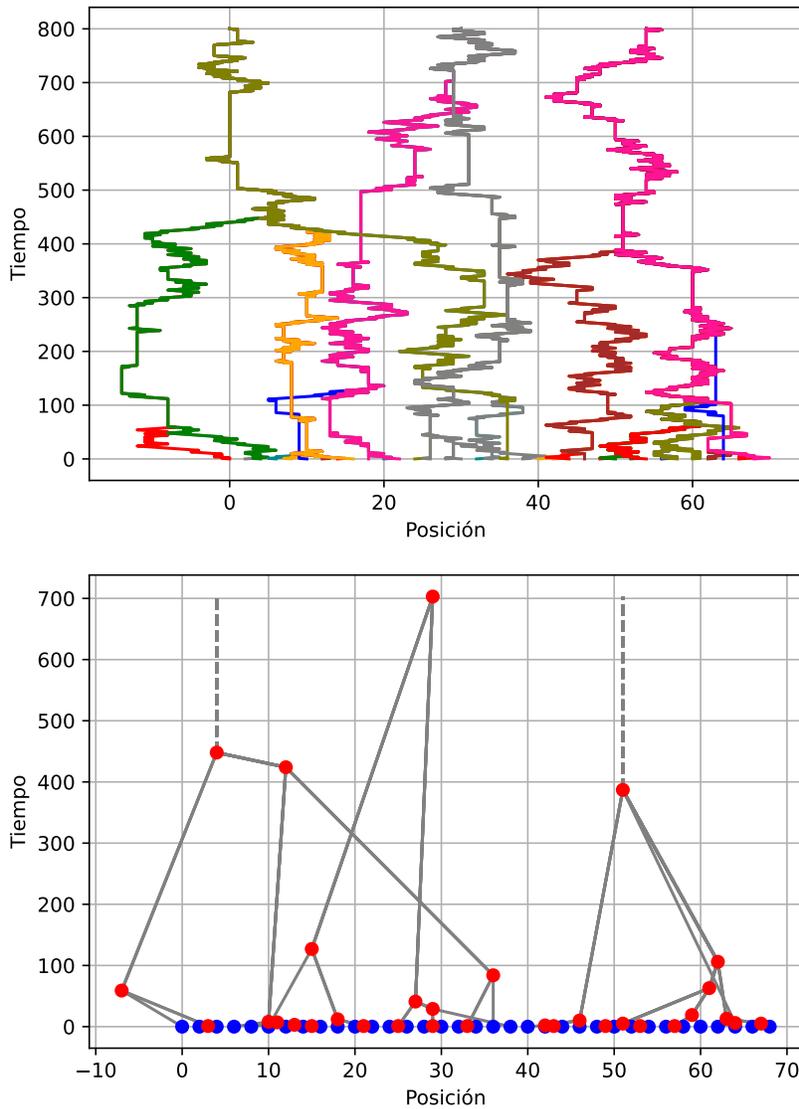


Figura 5.4: Simulación de 35 trayectorias del MBBS y el diagrama de coalescencias asociado, con probabilidades de despertar 0.03 y de dormir 0.03 en cada paso. Observemos que en esta realización la última coalescencia no se produjo.

Como en el caso de los movimientos brownianos sin banco de semillas, redujimos el tiempo máximo de simulación a 800 para visualizar mejor el coalescente. El tiempo adecuado para respetar la proporción del escalamiento de la Sección 1.3 sería $(2(35-1))^2 = 4,624$. A continuación mostramos el pseudocódigo para la simulación del coalescente.⁴ Una vez más no nos enfocaremos en la simulación del digrama de coalescencias, pues el código para esa parte es demasiado extenso.

⁴Referirse al archivo `caminitas_recta_bs.py`.

Pseudocódigo 11 Coalescente de MBBS

Notas: a) Las barras de valor absoluto denotan la longitud de una lista. b) El índice -1 representa el último elemento de una lista.

Entrada: $n \in \mathbb{Z}^+$: número de caminatas; $t_{max} \in \mathbb{Z}^+$: tiempo máximo de simulación; $p_1 \in [0, 1]$: prob. despertar; $p_2 \in [0, 1]$: prob. dormir.

Inicializar: $caminatas := \underbrace{\{0.5, \dots, 0.5\}}_{t_{max}+1 \text{ veces}}$; $despiertos := caminatas$; $dormidos := caminatas$.

Nota: Utilizamos el número 0.5 para que la primera caminata no cumpla la condición **if**.

for $j \in \{0, 1, \dots, 2n - 2\}$ **do**

$caminata := \{j\}$, $valor := j$, $despierto := \{j\}$, $dormido := \{j\}$.

Utilizar el Pseudocódigo 10 para llenar las t_{max} entradas de $caminata$, $despierto$ y $dormido$, de acuerdo con los puntos indicados en las viñetas de esta sección.

for $i \in \{0, 1, \dots, |caminata|\}$ **do**

for $k \in \{0, 1, \dots, |despiertos|\}$ **do**

if $despierto(i) = despiertos(k, i)$ **or** $dormido(i) = dormidos(k, i)$ **then**

$caminata(s) := caminatas(k, s) \quad \forall s \in \{i + 1, i + 2, \dots, t_{max}\}$

$despierto(s) := despiertos(k, s) \quad \forall s \in \{i + 1, i + 2, \dots, t_{max}\}$

$dormido(s) := dormidos(k, s) \quad \forall s \in \{i + 1, i + 2, \dots, t_{max}\}$

break

Agregar $caminata$ a $caminatas$

Agregar $despierto$ a $despiertos$

Agregar $dormido$ a $dormidos$

Graficar la trayectoria simulada. Mostrar hasta que $j = 2n - 2$.

Salida: Figura

Nota: Podemos hacer una modificación del algoritmo⁵ para simular MBBS en el plano, de manera análoga a como hicimos en la Sección 3.1. El punto de inicio de cada trayectoria es escogido uniformemente en $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$. Ver la Figura 5.5. De nuevo, el tiempo de simulación fue reducido para obtener una mejor visualización de las trayectorias.

⁵Referirse al archivo `caminatas_reticula_bs.py`.

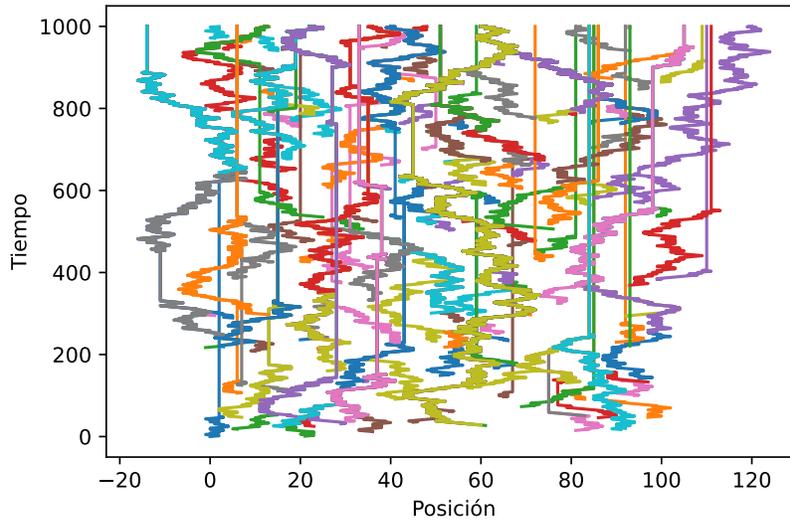
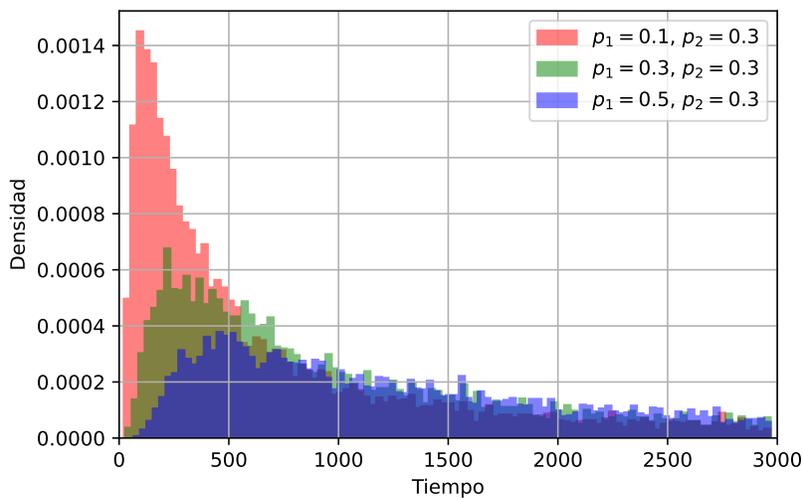


Figura 5.5: 200 MBBS coalescentes en el plano. Parámetros $p_1 = 0.01$ y $p_2 = 0.01$.

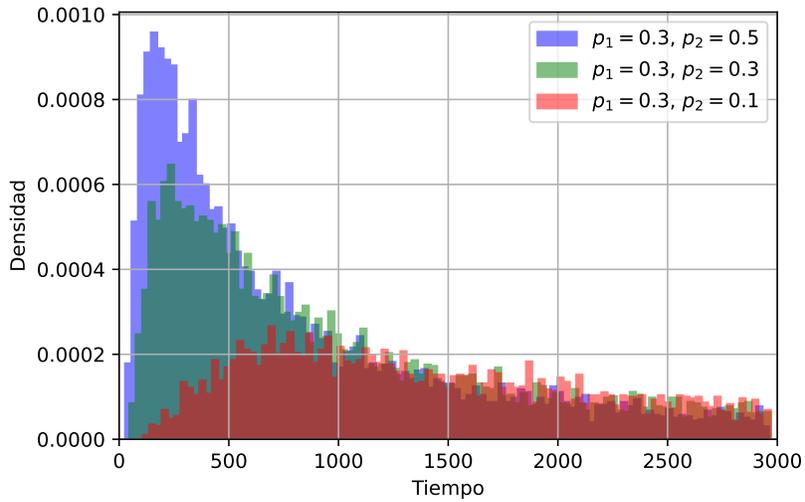
Tiempo de última coalescencia

Aproximaremos ahora la densidad del tiempo de última coalescencia de MBBS que parten de un segmento de recta. Modificamos el algoritmo empleado para que detecte si al alcanzar el tiempo máximo de simulación establecido hay una única trayectoria o no, y determinar así si la última coalescencia se produjo. En la Figura 5.6 podemos observar seis histogramas⁶ que muestran las densidades al variar los parámetros. Debido a que el tiempo de última coalescencia es casi siempre mayor que el del flujo browniano, tomamos probabilidades grandes p_1 y p_2 para que el número de veces que todas las trayectorias colisionaron fuera aceptable.



(a) Densidades al variar p_1 .

⁶Referirse al archivo `densidad_mbbs.py`.



(b) Densidades al variar p_2 .

Figura 5.6: Densidades empíricas del tiempo de última coalescencia del coalescente de MBBS. Cada histograma representa diferentes probabilidades de dormir y despertar en cada paso y fue generado a partir de simular 10,000 veces con 10 trayectorias. En este caso no realizamos los ajustes de densidad de kernel gaussiano de la Sección 4.5 y preferimos mostrar los histogramas inalterados.

Los valores aceptados y excedentes fueron los siguientes:

p_1 variando y p_2 fija (Figura 5.6 (a)).

Prob. de dormir	Prob. de despertar	Aceptados	Excedentes
0.1	0.3	7,482	2,518
0.3	0.3	6,124	3,876
0.5	0.3	4,913	5,087

p_1 fija y p_2 variando (Figura 5.6 (b)).

Prob. de dormir	Prob. de despertar	Aceptados	Excedentes
0.3	0.1	3,916	6,084
0.3	0.3	6,178	3,822
0.3	0.5	6,976	3,024

Al dividir el número de valores aceptados entre 10,000 obtenemos una aproximación a la probabilidad de última coalescencia antes del tiempo 3,000 en cada caso.

Observaciones:

- Los comportamientos de los histogramas en ambas figuras son parecidos, pero se encuentran invertidos de acuerdo con los valores de las probabilidades. Esto ocurre puesto que es más probable que la última coalescencia se dé estando las caminatas despiertas que dormidas.
- A excepción de los casos en los que $p_1 = p_2 = 0.3$, las densidades en la primera gráfica presentan máximos (valores de la moda) más grandes que las densidades en la segunda.
- Los valores excedentes son, en promedio, más bajos para las densidades en la primera gráfica, por lo que los histogramas en (a) presentan mayores tasas de aceptación.

Conclusión

A lo largo de esta tesis propusimos varios algoritmos que probaron ser efectivos y que parten de una misma base: la definición de proceso coalescente numerable. En cada sección tuvimos que realizar ciertas modificaciones para adecuar el algoritmo a las propiedades subyacentes del proceso, por lo que no es práctico fusionar todo el código desarrollado en una misma clase o función. Sin embargo, los algoritmos podrían optimizarse y enriquecerse para simular los coalescentes de muchísimos procesos más.

En el primer capítulo nos basamos en el teorema de Donsker y en la construcción de Fontes et al. para definir un método numérico para generar movimientos brownianos sin la cual posteriormente la simulación del coalescente de MBBS hubiera sido, si no imposible, sí más complicada. En el segundo capítulo logramos visualizar la web browniana de Fontes et al. y el flujo browniano de Arratia, así como la propiedad de decaimiento desde el infinito. En el tercer capítulo utilizamos el algoritmo para representar el tiempo de última coalescencia del flujo browniano restringido a un conjunto compacto. Además, calcular la forma cerrada de sus funciones de densidad y distribución fue útil no únicamente para comprobar la precisión del algoritmo, sino también para explorar algunas propiedades y el vínculo existente con ciertas ecuaciones diferenciales parciales. En el cuarto capítulo extendimos el algoritmo a procesos de Itô con ayuda de uno de los métodos numéricos más populares del cálculo estocástico. Reutilizar fragmentos del desarrollo del Capítulo 3, sobretodo de la Subsección 3.3.1, fue acertado para encontrar la distribución del tiempo de intersección en los coalescentes del movimiento browniano geométrico y de Ornstein-Uhlenbeck en su forma exacta. Por último, en el quinto capítulo programamos el movimiento browniano con banco de semillas de dos maneras diferentes: la primera haciendo uso de herramientas de la teoría de renovación, y la segunda mediante la construcción de las caminatas aleatorias coalescentes en el plano desarrollada por Fontes et al. e incluyendo la retícula $\mathbb{Z}_{\text{impar}}^2$. También propusimos una manera de simular el coalescente que cumple con su cometido de manera satisfactoria.

Hay una infinidad de propiedades que quedaron inexploradas. Algunos puntos que en mi opinión podrían dar lugar a proyectos futuros son:

- Encontrar la distribución en su forma cerrada del tiempo de última coalescencia en el coalescente de MBBS.
- Llevar a cabo un desarrollo similar al de Fontes et al. para definir la variable aleatoria límite del coalescente de MBBS cuando tomamos una infinidad de trayectorias.
- Proponer una regla de coalescencia adecuada para los coalescentes de movimientos brow-

nianos geométricos y de procesos de Ornstein-Uhlenbeck y Wright-Fisher cuando contamos con una infinidad de trayectorias.

- Analizar con detalle la función de distribución de la intersección de dos trayectorias del proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Posiblemente buscar responder a las preguntas ¿esta variable aleatoria es integrable? y ¿su función de distribución satisface alguna ecuación diferencial parcial, aún cuando su condición inicial presente una singularidad? Esto último se observa al calcular el límite cuando $t \downarrow 0$ de $\mathbb{P}(\tau_{x,y} \leq t)$, donde esta probabilidad está dada por la integral en (4.16). El teorema que nos otorga una solución de la ecuación del calor también es válido para algunas condiciones iniciales no acotadas bajo ciertas consideraciones adicionales.

Finalmente, sería estupendo que los algoritmos fueran mejorados en un futuro.

Con esto concluyo muy contento y agradecido este trabajo, cuya realización fue una experiencia sumamente grata y enriquecedora. La teoría de coalescencia es, sin duda, una rama multidisciplinaria apasionante de los procesos estocásticos.

Bibliografía

- [1] Arratia, Richard Alejandro. Coalescing Brownian motions on the line. Tesis de Ph.D. - The University of Wisconsin - Madison, 1979. Recuperado directamente del autor: rarratia@usc.edu.
- [2] Kaj, Ingemar, Krone, Stephen M. y Lascoux, Martin. Coalescent theory for seed bank models. En: *Journal of Applied Probability*. 38.2 (2001), pp. 285-300.
- [3] Durrett, Rick. *Probability Models for DNA Sequence Evolution*. Segunda Edición. Probability and its Applications. Springer, Nueva York, 2008.
- [4] Kingman, J. F. C. The coalescent. En: *Stochastic Processes and their Applications* 13.3 (1982), pp. 235-248.
- [5] Fontes, L. R. G., Isopi, M., Newman, C. M. y Ravishankar, K. The Brownian Web: Characterization and Convergence. En: *The Annals of Probability* 34.4 (2004), pp. 2857-2883.
- [6] Coolidge, J. L. The Gambler's Ruin. En: *The Annals of Mathematics* 10.4 (1909), pp. 181-192.
- [7] Rincón, Luis. *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2012.
- [8] Shreve, Steven E. *Stochastic Calculus for Finance. II. Continuous-Time Models*. Springer-Verlag, Nueva York, 2004.
- [9] Revuz, Daniel y Yor, Marc. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Tercera Edición. Vol. 293. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- [10] Berestycki, Nathanaël, Garban, Christophe y Sen, Arnab. Coalescing Brownian Flows: A New Approach. En: *The Annals of Probability* 43.6 (2015), pp. 3177-3215.
- [11] González Casanova Soberón, Adrián. The effect of latency in population genetics. Tesis de Ph.D. - Technischen Universität Berlin, 2016.
- [12] Schertzer, Emmanuel, Sun, Rongfeng y Swart, Jan M. The Brownian web, the Brownian net and their universality. En: *Advances in disordered systems, random processes and some applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017, pp. 270-368.

- [13] Mattauch, Linus. The Brownian Web. Disertación, Parte C - University of Oxford, Honour School of Mathematics and Philosophy, 2008. Recuperado de: <http://www.climatecon.tu-berlin.de/>.
- [14] Karatzas, Ioannis y Shreve, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Segunda Edición. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Nueva York, 1991.
- [15] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Segunda Edición. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [16] Lemons, Don S. y Gythiel, Anthony. Paul Langevin’s 1908 paper “On the theory of Brownian motion” [“Sur la théorie du mouvement brownien”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 146 (1908), pp. 530-533]. En: *American Journal of Physics* 65, 1079 (1997), pp. 1079–1080.
- [17] Lamberton, Damien y Lapeyre, Bernard. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Tercera Edición. Ellipses, Édition Marketing, París, 2012.
- [18] Oosterlee, Cornelis W. y Grzelak, Lech A. *Mathematical Modeling and Computation in Finance. With Exercises and Python and MATLAB Computer Codes*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2020.
- [19] Panik, Michael J. *Stochastic Differential Equations. An Introduction With Applications in Population Dynamics Modeling*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2017.
- [20] Wasserman, Larry. *All of Statistics*. Springer-Verlag, Nueva York, 2004.
- [21] Evans, Steven N., Morris, Ben y Sen, Arnab. Coalescing systems of non-Brownian particles. En: *Probability Theory and Related Fields* 156 (2013), no. 1-2. pp. 307-342.