



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una aplicación de los procesos estocásticos a
un problema de fisiología celular

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Iván Irving Rosas Domínguez

TUTORA

Sandra Palau Calderón

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Dra. Sandra Palau, por el constante apoyo para realizar este trabajo, a pesar de la incertidumbre que se vive en estos tiempos.

También al Dr. Sergio Iván por el aprendizaje que he adquirido de él tanto en lo académico como en lo personal. Su guía ha sido de gran ayuda en diversos momentos.

Mi principal agradecimiento es hacia mi familia, quienes me han apoyado en todo momento, en todo lugar y en toda decisión. A ustedes, y a los que me han apoyado para llegar hasta aquí, gracias.

Estudios de licenciatura concluidos gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM: IA103220, Procesos de ramificación multitypo. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida. Agradezco también a la Facultad de Ciencias por el apoyo recibido para la conclusión de este trabajo.

Introducción

Los procesos estocásticos son un tema central en el estudio de la probabilidad. Históricamente, estos han estado presentes de alguna u otra forma en los primeros intentos por estudiar fenómenos que involucren el azar, y a partir de la formalización de la probabilidad a principios del siglo XX su relevancia ha ido en aumento, no sólo en el aspecto teórico, sino también en cuanto a las aplicaciones.

Actualmente existen una gran variedad de fenómenos para los cuales se han hecho modelos basados en procesos estocásticos, los cuales muestran el potencial que esta teoría tiene para describir nuestra realidad. En este sentido, el presente trabajo tiene como finalidad estudiar dos tipos de procesos estocásticos y presentar una aplicación en algún fenómeno.

El primer capítulo aborda las cadenas de Márkov a tiempo continuo. En él, se introduce la propiedad de Márkov como la característica fundamental de este tipo de procesos. Se introducen las primeras definiciones y resultados, así como algunas restricciones, como la homogeneidad, que simplifican el tratamiento de las cadenas. Después se presentan las ecuaciones de Kolmogorov, derivadas de la naturaleza continua de estos procesos. Con apoyo del material del apéndice sobre la exponencial de una matriz, se presentan las soluciones a dichas ecuaciones para cadenas con un espacio de estados discreto y se comenta de manera breve el caso continuo. Luego, se presentan las propiedades de comunicación y las distribuciones estacionarias y límite. Finalmente, el capítulo concluye con tres ejemplos concretos donde se presentan la mayoría de los conceptos desarrollados en el capítulo.

El segundo capítulo trata sobre los procesos de renovación. Se introduce la idea de este tipo de procesos, se contrasta con las cadenas de Márkov, y se presentan las definiciones y propiedades básicas. Después el estudio se centra en las propiedades límite de este tipo de procesos, principalmente los teoremas de renovación, los cuales aportan información valiosa en las aplicaciones. También se presenta un resultado análogo al teorema central del límite. El capítulo termina con un breve estudio de los procesos de renovación con premio, donde se presenta un análogo a los teoremas de renovación, que es un resultado esencial para el último capítulo. Ejemplos de algunos de los conceptos son presentados a lo largo del mismo.

Por último, en el tercer capítulo se presenta una aplicación de los procesos de renovación a la reproducción de las células madre del colon humano. De acuerdo con [9], el tejido del colon es un ejemplo bastante estudiado de tejidos donde las células son renovadas constantemente, y donde estas siguen un esquema de reproducción particular: existe un nicho de unas cuantas células madre que al dividirse, algunas de ellas comienzan a diferenciarse en células del tejido en cuestión, aumentando en el proceso de especialización la tasa de reproducción para alcanzar la velocidad a la cual el tejido ya especializado muere. Dicho proceso de reproducción es naturalmente estocástico, dada la aleatoriedad de las variables involucradas en él. Así, el objetivo del capítulo es presentar un modelo para describir este proceso, el cual utiliza los procesos de renovación con premio. Para ello, la primera sección del capítulo se aboca a un muy breve estudio sobre la fisiología del colon. En él, se identifica el nicho de células madre, que se encuentra en el fondo de unas estructuras conocidas como Criptas de Lieberkühn. La siguiente sección presenta el modelo y al final se contrastan predicciones realizadas por el mismo con respecto a datos experimentales. Dichos datos son todos provistos por [9].

Índice general

1. Cadenas de Márkov a tiempo continuo	1
1.1. Definición y primeras propiedades	1
1.2. Las ecuaciones de Kolmogorov	9
1.3. Q-matrices y solución de las ec. de Kolmogorov	16
1.4. Clases de comunicación	24
1.5. Distribuciones estacionarias y límite	29
1.6. Ejemplos	31
1.6.1. Cadena con dos estados	31
1.6.2. El proceso de Poisson	36
1.6.3. Procesos de nacimiento y muerte	40
2. Teoría de renovación	55
2.1. Definición y primeras propiedades	55
2.2. Los teoremas de renovación	63
2.3. Procesos de renovación con premio	76
3. Aplicación de los procesos estocásticos	83
3.1. El colon humano	83
3.2. Modelo de las células del colon	87
3.2.1. Descripción del modelo	89
3.2.2. El compartimento de células madre	90
3.2.3. El compartimento de células de transición	100
3.2.4. Predicción del número de divisiones y células de transición	101
3.3. Conclusiones	104
A. La exponencial de una matriz	107

Capítulo 1

Cadenas de Márkov a tiempo continuo

En este capítulo estudiamos las cadenas de Márkov a tiempo continuo. Este tipo de procesos generaliza a las cadenas de Márkov con un conjunto de parámetros discreto, por lo que hay cierta analogía entre algunos resultados que se obtienen al momento de estudiar estos procesos, mas no siempre sucede que las pruebas resulten ser análogas a las del caso discreto. El problema surge precisamente porque un conjunto de parámetros continuo casi siempre resulta ser más complicado de estudiar que un conjunto discreto.

Sin embargo, la idea de las cadenas a tiempo continuo sigue siendo la misma: procesos con un espacio de estados a lo más numerable en los cuales conociendo la historia del proceso hasta un cierto instante $t \geq 0$, para estudiar su comportamiento futuro sólo importa conocer el último estado de la cadena del que se tiene registro.

A pesar de la dificultad que conlleva estudiar ahora cadenas con un parámetro continuo, la cantidad de aplicaciones que se pueden abarcar aumenta, ya que hay fenómenos en los que conviene más que el parámetro del proceso pertenezca a un conjunto continuo, el cuál típicamente es la semirecta $[0, \infty)$. Tal es el caso de los fenómenos que se modelan con el proceso de Poisson, el cuál por sí solo conlleva una gran cantidad de aplicaciones, y que es estudiado brevemente en el capítulo junto varios otros ejemplos de cadenas de Márkov a tiempo continuo.

1.1. Definición y primeras propiedades

Comenzamos por definir una cadena de Márkov a tiempo continuo. A lo largo de todo el capítulo, I representa un conjunto no vacío y a lo más numerable.

Definición 1.1.1. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo*

definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea I su espacio de estados. Decimos que $(X_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Márkov a tiempo continuo si cumple que $\forall s, t \geq 0, \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{F} -medible,

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_s). \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ es la σ -álgebra generada por todas las variables X_u hasta el instante s .

La igualdad (1.1) es conocida con el nombre de *propiedad de Márkov*. Tal igualdad puede reformularse usando propiedades de la esperanza condicional, de forma que podemos reescribir la propiedad de Márkov de la siguiente forma: $\forall s, t \geq 0, \forall i, j \in I$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x(u), \forall u < s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i), \quad (1.2)$$

donde $\forall u < s, x(u) \in I$. Esta forma de expresar la propiedad de Márkov es más asequible para el propósito de este texto, y será la forma en como usaremos la propiedad de Márkov.

Intuitivamente la propiedad de Márkov nos dice que para conocer la probabilidad de que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ llegue a un estado $j \in I$ en un tiempo mayor a s conociendo los estados X_u a los cuales ha llegado el proceso para cualquier tiempo $u \in [0, s]$, es suficiente con conocer el estado al cual llegó el proceso en el último instante de tiempo del que tenemos información sobre él, que es X_s .

Si interpretamos tal último tiempo s como el presente, podemos reformular lo anterior diciendo que para conocer el comportamiento de una cadena de Márkov en un tiempo futuro $t+s$, basta con conocer el valor que tomó el proceso en el tiempo presente, X_s , sin importar los valores que haya tomado antes. Es decir, el futuro de la cadena es independiente de su pasado, dado el presente.

A lo largo del capítulo siempre usaremos cadenas de Márkov a tiempo continuo, y nos referiremos a estas como cadenas de Márkov o simplemente cadenas.

En un inicio, la probabilidad de que la cadena vaya de un estado i a un estado j en un intervalo de tiempo de tamaño fijo no tiene por qué ser igual conforme va avanzando el tiempo, es decir, en general, para $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) \neq \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i),$$

pues el proceso puede ir cambiando su comportamiento conforme cambia el intervalo de tiempo en el que estemos centrados.

Sin embargo, si una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ cumple con que las probabilidades de ir de un estado a otro en un intervalo de tiempo de tamaño fijo son independientes del punto de $[0, \infty)$ en el que nos encontremos, recibe un nombre especial:

Definición 1.1.2. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov. Decimos que la cadena es homogénea si $\forall s, t \geq 0, \forall i, j \in I$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = i | X_s = j) = \mathbb{P}(X_t = i | X_0 = j).$$

Lo anterior nos da la posibilidad de denotar a las probabilidades de ir de un estado i a un estado j en un tiempo $t \geq 0$, como sigue:

$$P_{ij}(t) := \mathbb{P}(X_t = i | X_0 = j).$$

Dichas probabilidades se conocen como *probabilidades de transición*.

Nótese que cuando $t = 0$,

$$P_{ij}(0) = \mathbb{P}(X_0 = i | X_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La intuición del caso $t = 0$ es que $P_{ij}(0)$ representa la probabilidad de ir al estado i desde el estado j en una cantidad de tiempo 0, es decir, de forma inmediata, lo cuál ocurre sólo si el estado i es igual al estado j .

Nuestro interés es estudiar cadenas con esta propiedad, por lo que a lo largo del capítulo asumiremos que las cadenas de Márkov son siempre homogéneas.

Ya desde este instante es posible visumbrar la importancia de las probabilidades de transición, pues son cantidades que van a dictar el comportamiento del proceso en entre cualquier par de estados y en cualquier instante de tiempo. Para facilitar su estudio, una forma conveniente de ver tales probabilidades de transición es enmarcarlas en una matriz.

Recordemos que I el espacio de estados es un conjunto numerable, así que para visualizar la idea supongamos que $I = \{1, 2, 3, \dots\}$. Entonces las probabilidades de transición para un tiempo $t > 0$ se ven como:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & \dots \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & \dots \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Dada la dependencia de dicha matriz del tiempo, denotaremos como $P(t)$ a tal matriz. De acuerdo a lo dicho antes, en el caso $t = 0$ convenimos que $P(0) = Id$, donde Id es la matriz identidad sobre el conjunto I . Obsérvese que con esta notación se tiene la coincidencia siguiente: $\forall i, j \in I$,

$$P_{ij}(t) = (P(t))_{ij},$$

la cual será usada en algunas ocasiones más adelante.

Ahora, es natural que al estudiar los procesos anteriores con un espacio de estados discreto, tengamos en mente que estos comienzan en un determinado estado $X_0 = i$ con $i \in I$ y que después de un determinado tiempo $t > 0$ el proceso salte a un estado $j \in I$ distinto de i , de forma que $X_t = j$. Tanto los momentos del intervalo $[0, \infty)$ en los cuales el proceso realiza un salto, así como la cantidad de tiempo que el proceso se demora en dicho estado antes de realizar un salto a otro estado, son cantidades de interés al estudiar las cadenas de Márkov. Estas cantidades, en virtud de la aleatoriedad del proceso, son en sí mismas variables aleatorias. Tenemos así las siguientes definiciones:

Definición 1.1.3. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov. Definimos los tiempos de salto como una sucesión de variables aleatorias $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$W_0 = 0 \quad y \quad \forall n \geq 0, \quad W_{n+1} := \inf\{t \geq W_n \mid X_t \neq X_{W_n}\},$$

en donde asumimos que $\inf \emptyset = \infty$.

Los tiempos de salto de la cadena nos indican precisamente los instantes en los que ocurre un cambio en las trayectorias del proceso al cambiar de estado la cadena. La intuición de la convención $\inf \emptyset = \infty$ se debe a que, si llegado un cierto instante, la cadena no vuelve jamás a cambiar de estado a partir de tal instante, entonces podríamos decir que el siguiente tiempo de salto se da en el infinito.

Además, si para alguna $n \geq 0$, $W_n = \infty$, la convención anterior define a los tiempos de salto W_m para cualquier $m \geq n$, ya que se tiene que $\{t \geq \infty \mid X_t \neq X_{W_n}\} = \emptyset$, y recordando la convención sobre $\inf \emptyset$ obtenemos que $\forall m \geq n$, $W_m = \infty$.

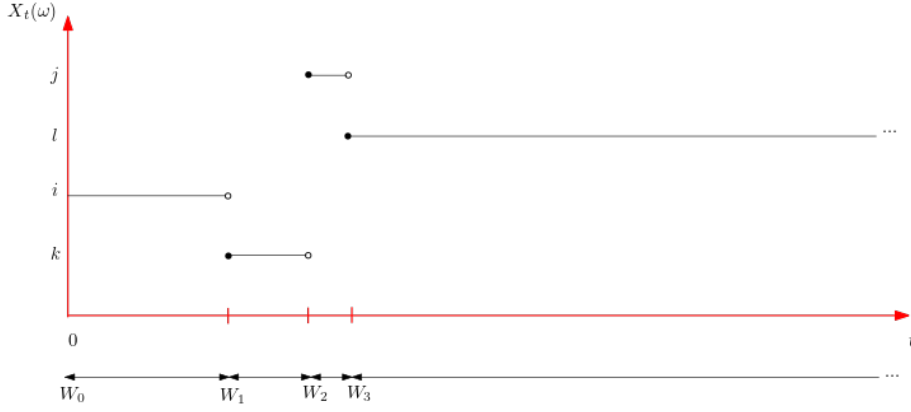
De manera que si para una $n \geq 0$ se tiene $W_n = \infty$, denotamos $X_\infty := X_{W_n}$. El estado X_∞ precisamente representa el valor en el cual la cadena se ha estancado, siendo X_∞ un valor indefinido en otro caso.

Definición 1.1.4. Dada una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ con estado inicial $X_0 = i$, definimos el tiempo de estancia (en el estado i) como la variable aleatoria

$$T_i = \inf\{s \geq 0 \mid X_s \neq i\}.$$

Estos *tiempos de estancia* representan el primer tiempo t en el cual nuestra cadena abandona su estado inicial i , lo cual engloba información valiosa sobre el comportamiento del proceso.

Los conjuntos de variables anteriores nos dan una primera idea de cómo se visualizan las trayectorias de un proceso que salta, pues representan la idea de los cambios de la cadena de un estado a otro transcurrido un tiempo determinado, además de contener en sí mismas información sobre el proceso. Ahora bien, existen distintas posibilidades para la evolución de la cadena según alguna

Figura 1.1: Cadena con l como estado absorbente.

posible realización $\omega \in \Omega$.

Primero, tenemos la posibilidad de que exista un estado $i \in I$, tal que si la cadena inicia o llega eventualmente a i , la cadena quede estancada en él, como en la figura 1.1. A un estado con dicha propiedad se le denomina *estado absorbente*, concepto que se plasma en la siguiente definición:

Definición 1.1.5. Dada una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ con espacio de estados I , decimos que $i \in I$ es un estado absorbente si ocurre que

$$\mathbb{P}(T_i = \infty) = 1.$$

Nótese que, gracias a la suposición de homogeneidad, la condición anterior se puede trasladar a cualquier instante en el tiempo, por lo que un estado absorbente puede ser un estado inicial de la cadena, o bien puede llegarse a él eventualmente.

Otra posibilidad es que la cadena tenga una sucesión de saltos de tal forma que los tiempos entre estos se van acortando cada vez más entre sí, hasta llegar a un punto en el que se dan infinitos saltos en una cantidad finita de tiempo, tal como en la figura 1.2. En este caso, se dice que la cadena *explota* en el instante $t = \zeta$, que definimos en términos de las variables $(W_n)_{n \geq 0}$ como sigue:

Definición 1.1.6. Dada una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$, definimos el tiempo de explosión ζ como

$$\zeta := \sup_{n \geq 0} W_n.$$

Y finalmente está la posibilidad de que no exista una infinidad de saltos en un intervalo finito de tiempo, pero que la cadena cambie constantemente a lo largo del tiempo. En tal caso denotamos $\zeta = \infty$, y gráficamente se representa

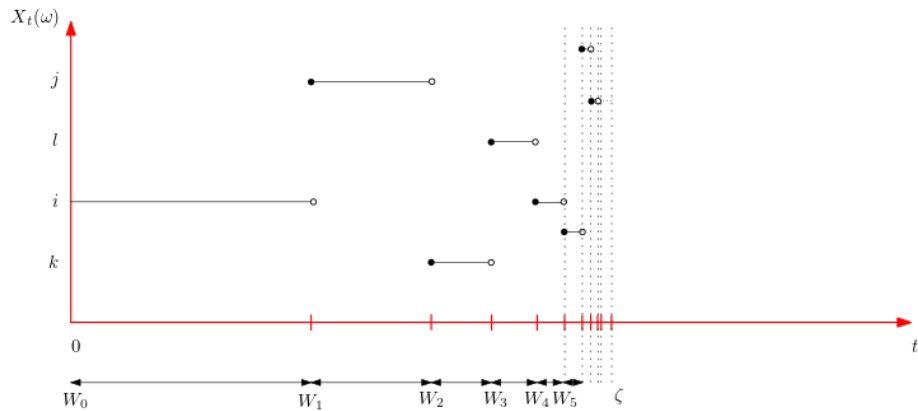
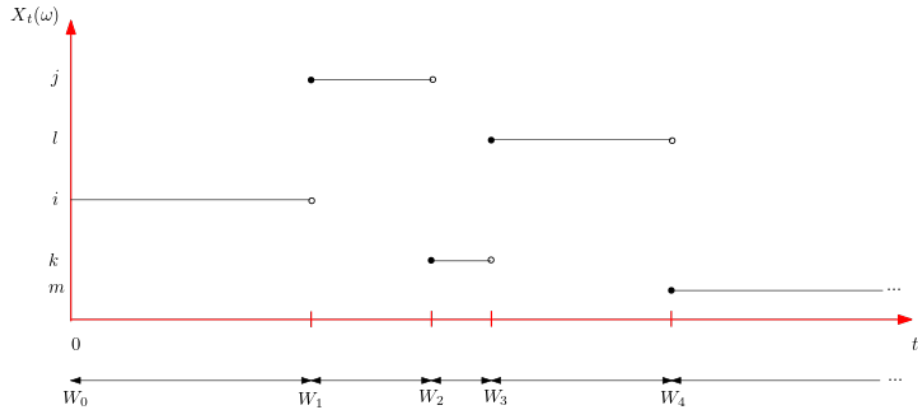
Figura 1.2: Cadena con explosión en $t = \zeta$.

Figura 1.3: Cadena usual.

en la figura 1.3.

Aunque las posibilidades son variadas, en este texto nos centraremos en estudiar las cadenas que tienen trayectorias similares a las de la figura 1.3, de forma que impondremos ciertas restricciones sobre las cadena.

Como primera restricción, en el capítulo vamos a considerar solamente cadenas no explosivas, es decir, asumiremos que $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 0$. Así, a diferencia del ejemplo de la figura 1.2, las cadenas que vamos a considerar están en principio bien definidas para cualquier $t \geq 0$. Un tratamiento breve de cadenas que presentan un tiempo de explosión ζ puede consultarse en [5, sección 2.7].

Por otro lado, asumiremos a lo largo del capítulo que las variables aleatorias $(T_i)_{i \in I}$ son independientes entre sí, y asumiremos lo mismo entre las variables

X_{T_i} y T_i . En particular esto último nos dice que el tiempo de estancia de la cadena en un estado $i \in I$ es independiente del estado a donde la cadena se dirija al saltar.

Además, las variables aleatorias T_i se supondrán finitas con probabilidad uno, o infinitas con probabilidad uno. Esto significa que los estados de la cadena de Márkov sólo pueden ser con probabilidad 1 alguna de las dos condiciones: absorbentes o no absorbentes.

Aquellas cadenas que cumplan con las condiciones anteriores intuitivamente poseen trayectorias como las que nos interesan.

Para comenzar el estudio de dichos procesos, nos centramos en las variables aleatorias $(T_i)_{i \in I}$. Al ser cantidades que rigen el comportamiento de los saltos entre los estados de la cadena, una pregunta que surge de forma natural es: ¿cómo se distribuyen las variables aleatorias T_i , para $i \in I$ arbitrario?

La respuesta a lo anterior es bastante interesante, y se fundamenta en la propiedad que caracteriza a las cadenas de Márkov: para conocer un comportamiento futuro teniendo información de la historia del proceso, basta con lo último que sabemos de él.

Teorema 1.1.7. *Dada una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ con estado inicial $X_0 = i$, la variable aleatoria $T_i = \inf\{s \geq 0 | X_s \neq i\}$ se distribuye de forma exponencial.*

Demostración. Dado que las variables aleatorias exponenciales son las únicas variables aleatorias continuas con la propiedad de pérdida de memoria, bastará con probar que T_i tiene dicha propiedad.

Sean $s, t \geq 0$. Notemos que, al ser T_i el ínfimo de los tiempos en donde X_t deja el estado i , se tiene la siguiente igualdad entre eventos

$$\{T_i > t\} = \{X_u = i, \forall u \leq t\}. \quad (1.3)$$

Y así,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i > s + t | T_i > t) &= \mathbb{P}(X_u = i, \forall u \leq t + s | X_u = i, \forall u \leq t) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_u = i, \forall u \leq t, \text{ y } X_u = i, \forall u \in (t, t + s))}{\mathbb{P}(X_u = i, \forall u \in (0, t))} \\ &= \mathbb{P}(X_u = i, \forall u \in (t, t + s) | X_u = i, \forall u \leq t), \end{aligned}$$

y usando la propiedad de Márkov,

$$= \mathbb{P}(X_u = i, \forall u \in (t, t + s) | X_t = i).$$

Finalmente, por homogeneidad y la igualdad (1.3),

$$= \mathbb{P}(X_u = i, \forall u \in (0, s) | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_i > s).$$

Hemos llegado a que $\mathbb{P}(T_i > s + t | T_i > t) = \mathbb{P}(T_i > s)$, y por lo tanto T_i tiene una distribución exponencial. ■

Para cada $i \in I$, denotaremos por λ_i al parámetro de la variable T_i , de forma que $T_i \sim \text{exp}(\lambda_i)$. Así mismo, denotaremos por R_{ij} a la probabilidad de que la cadena de Márkov salte del estado i al estado j llegado el tiempo $t = T_i$. Esto es:

$$R_{ij} = \mathbb{P}(X_{T_i} = j | X_0 = i),$$

donde la probabilidad en el caso $i = j$ la asumiremos siempre igual 0, pues de esta forma aseguramos que la cadena no salte al mismo estado en el que se encuentra.

A dichas cantidades las denominaremos probabilidades de salto, y así como las probabilidades de transición, se pueden enmarcar en una matriz, la cual nos arroja bastante información sobre el proceso.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & R_{12} & R_{13} & \cdots \\ R_{21} & 0 & R_{23} & \cdots \\ R_{31} & R_{32} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \end{array}$$

Notemos que la matriz anterior es estocástica:

- $\forall i, j \in I, R_{ij} \geq 0$ ya que R_{ij} es una probabilidad.
- Sus renglones suman 1, pues por definición,

$$\sum_{j \in I} R_{ij} = \sum_{j \in I} \mathbb{P}(X_{T_i} = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{T_i} \in I | X_0 = i) = 1.$$

Las cantidades T_i y las probabilidades de salto R_{ij} para $i, j \in I$ son bastante importantes en nuestro proceso de acuerdo al siguiente resultado:

Teorema 1.1.8. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo. Sean $(R_{ij})_{i, j \in I}$ y $(\lambda_i)_{i \in I}$ las probabilidades de salto y los parámetros de los tiempos de estancia T_i , respectivamente. Entonces la cadena está determinada de forma única por dichas cantidades.*

Su demostración será omitida en este texto, por lo que remitimos a [5, secciones 2.6 y 2.8].

Nuestro primer objetivo es estudiar las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ para $i, j \in I$ y $t \geq 0$ arbitrarios, pues son cantidades que nos describen explícitamente el comportamiento de las cadenas de Márkov.

El objetivo anterior es bastante delicado, pues no sólo hay dependencia de los estados i, j , sino también del tiempo t que es una variable continua. Para ello desarrollaremos varios conceptos y resultados.

1.2. Las ecuaciones de Kolmogorov

Para comenzar con el estudio de las probabilidades de transición, introducimos la siguiente notación:

Notación: Dada una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$, un estado $i \in I$ y un conjunto medible $A \in \mathcal{F}$, denotamos a la medida de probabilidad condicionada al evento $\{X_0 = i\}$ como:

$$\mathbb{P}_i(A) := \mathbb{P}(A|X_0 = i).$$

En particular, tenemos que

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) := \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i) = P_{ij}(t),$$

y

$$\mathbb{P}_i(X_t \in B) := \mathbb{P}(X_t \in B|X_0 = i) = \sum_{j \in B} P_{ij}(t),$$

para $j \in I$ y $B \in \mathcal{F}$.

Un primer resultado que describe las probabilidades de transición es el siguiente:

Teorema 1.2.1 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov y sean $s, t \geq 0$, $i, j \in I$. Entonces se cumple que*

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in I} P_{ik}(t)P_{kj}(s). \quad (1.4)$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+s) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_0 = i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in I} \frac{\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_t = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = k) \mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_s = j | X_0 = k) P_{ik}(t) \\
&= \sum_{k \in I} P_{kj}(s) P_{ik}(t),
\end{aligned}$$

donde en la antepenúltima igualdad se usó la propiedad de Márkov, y en la penúltima la homogeneidad de la cadena. ■

Las ecuaciones (1.4) son un resultado esencial de cadenas de Márkov tanto a tiempo discreto como a tiempo continuo, y en este último nos pueden dar información acerca del proceso en intervalos de tiempo pequeños.

También con las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, podemos dar una primera expresión para las probabilidades de transición.

Teorema 1.2.2. Sean $i, j \in I$ y $t \geq 0$. Entonces

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t-s) ds. \quad (1.5)$$

Demostración. La idea es partir el evento $\{X_t = j | X_0 = i\}$ en dos partes, dependiendo de si la cadena salta de i a j en $[0, t]$ o si no lo hace, es decir, de si $0 \leq T_i \leq t$ o $T_i > t$, los cuales son eventos ajenos. Esta situación se ilustra en la figura 1.4. Así,

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(X_t = j, t < T_i) + \mathbb{P}_i(X_t = j, T_i \leq t). \quad (1.6)$$

Por un lado, $\mathbb{P}_i(X_t = j, t < T_i)$ corresponde a la probabilidad del evento en el cual la cadena no ha saltado de i antes del instante $t \geq 0$, con lo cual,

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < T_i) = \mathbb{P}(X_t = j, t < T_i | X_0 = i) = \begin{cases} \mathbb{P}(t < T_i) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

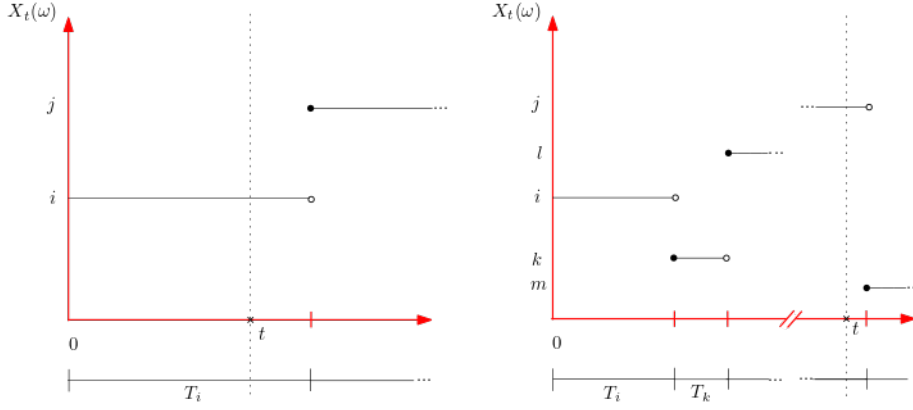


Figura 1.4: Los eventos $T_i > t$ y $0 \leq T_i \leq t$ en una trayectoria de la cadena.

o lo que es lo mismo,

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < T_i) = \delta_{ij} \mathbb{P}(t < T_i),$$

y como vimos que para $i \in I$, $T_i \sim \exp(\lambda_i)$, concluimos que

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < T_i) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t}. \quad (1.7)$$

Por otro lado, $\mathbb{P}_i(X_t = j, T_i \leq t)$ corresponde al evento en el cuál la cadena ya saltó de i y de hecho al tiempo t está en el estado j . Sin embargo no conocemos qué ocurrió en el intervalo de tiempo $[T_i, t]$, ya que podría haber saltado la cadena de i a j directamente, o podría haber saltado a distintos estados antes de ir a j , así que para calcular tal probabilidad hacemos uso de la distribución exponencial de T_i y del hecho de que la probabilidad de salto de i a j está dada por R_{ij} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(X_t = j, T_i \leq t) &= \int_0^t f_{X_t, T_i | X_0}(j, s | i) ds \\ &= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} f_{X_t, T_i, X_s | X_0}(j, s, k | i) ds, \end{aligned}$$

donde se hace la convención de que $f_{X|Y}(x|y)$ denota a la función de densidad condicional de X dado Y si es que X y Y son variables continuas, a la función de masa condicional, si es que las funciones X y Y son discretas, o bien algún caso mixto, como el nuestro. Ahora, condicionando, usando la propiedad de Márkov y homogeneidad,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} f_{T_i|X_0}(s|i) f_{X_s|T_i, X_0}(k|s, i) f_{X_t|T_i, X_s, X_0}(j|s, k, i) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} f_{T_i|X_0}(s|i) f_{X_s|T_i, X_0}(k|s, i) f_{X_t|T_i, X_s}(j|s, k) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} f_{T_i|X_0}(s|i) f_{X_s|T_i, X_0}(k|s, i) f_{X_{t-s}|T_i, X_0}(j|s, k) ds.
\end{aligned}$$

Finalmente usando la independencia de los tiempos de estancia con el proceso al cambiar de estado y la definición de las probabilidades de salto,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} f_{T_i|X_0}(s|i) \mathbb{P}(X_{T_i} = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{t-s} = j | X_0 = k) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k \in I, k \neq i} \lambda_i e^{-\lambda_i s} R_{ik} P_{kj}(t-s) ds \\
&= \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t-s) ds. \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) concluimos. ■

Aunque la ecuación (1.5) nos da una expresión explícita de la probabilidad que nos interesa, resulta de poca utilidad práctica pues involucra una ecuación integral en donde el integrando tiene a las probabilidades $P_{kj}(t-s)$ que son las que queremos conocer. Sin embargo, con dicha ecuación podemos llegar a una expresión particular para las probabilidades $P_{ij}(t)$, que involucra a sus derivadas cuando las vemos como función de la variable t .

En la ecuación (1.5), usemos el cambio de variable $u = t - s$. Tenemos que $s = t - u$ y con ello,

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) &= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} - \int_t^0 \lambda_i e^{-\lambda_i(t-u)} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(u) du \\
&= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i u} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(u) du \\
&= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i u} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(u) du. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos la función $P_{ij} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $P_{ij}(t)$. Notemos que dicha función tiene derivada continua pues acabamos de obtener una expresión para ella que se compone de funciones de clase C^1 respecto a t . Por lo tanto, su derivada está bien definida y, denotándola como $P'_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) &= \delta_{ij}(-\lambda_i e^{-\lambda_i t}) - \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i u} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(u) du \\ &\quad + \lambda_i e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i t} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t) \\ &= -\lambda_i \left(\delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i u} \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(u) du \right) \\ &\quad + \lambda_i \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t), \end{aligned}$$

pero la expresión entre paréntesis es justamente la ecuación (1.9), por lo tanto,

$$P'_{ij}(t) = -\lambda_i P_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t). \quad (1.10)$$

La ecuación anterior nos permite conocer las probabilidades de transición entre cualesquiera dos estados $i, j \in I$ a un tiempo $t \geq 0$ a través de sus derivadas. Entonces nuestro objetivo es resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales (1.10).

Una observación detallada de dicho conjunto de ecuaciones revela una forma muy conveniente de escribirlas: pueden verse como el producto de dos matrices. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo con probabilidades de salto $\{R_{ij} : i, j \in I\}$. Definimos el generador infinitesimal de la cadena como la matriz $\{Q_{ij} : i, j \in I\}$ donde $\forall i, j \in I$,

$$Q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j, \\ \lambda_i R_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

El siguiente resultado nos muestra la importancia que tiene el generador infinitesimal en ellas:

Teorema 1.2.4. Dada una cadena de Márkov a tiempo continuo $(X_t)_{t \geq 0}$, su generador infinitesimal la determina de forma única.

Demostración. Recordemos que una cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ está determinada de forma única por

1. $(T_i)_{i \in I}$ los tiempos de estancia que se distribuyen $\exp(\lambda_i)$.

2. Las probabilidades de salto instantáneo $\{R_{ij} : i, j \in I\}$.

Así, dado el generador infinitesimal Q , primero recuperamos a las probabilidades de salto como sigue:

$$\forall i, j \in I, \quad R_{ij} = \begin{cases} -\frac{Q_{ij}}{Q_{ii}} & \text{si } Q_{ii} \neq 0, \\ (r_{ij})_{j \in I} & \text{si } Q_{ii} = 0, \end{cases}$$

donde las probabilidades $(r_{ij})_{i \in I}$ provienen de una distribución de probabilidad cualquiera.

Finalmente construimos la sucesión de variables exponenciales $(T_i)_{i \in I}$ tomando una sucesión de variables aleatorias independientes $(Z_i)_{i \in I}$ tales que $Z_n \sim \exp(1)$ para cualquier $n \in I$ y definimos $T_i := \frac{Z_i}{-Q_{ii}}$ para cada $i \in I$ tal que $Q_{ii} \neq 0$. Entonces $T_i \sim \exp(-Q_{ii})$. Si un estado $j \in I$ es tal que $Q_{jj} = 0$ entonces dicho estado es absorbente, por lo que una variable aleatoria T_j que tome el valor ∞ con probabilidad 1 debe ser añadida a la sucesión $(T_i)_{i \in I}$. ■

Más adelante estudiaremos mejor esta matriz. Por ahora, con la definición del generador infinitesimal la expresión obtenida en (1.10) se puede escribir como producto de las matrices $P(t)$ y Q . Notemos que para $i, j \in I$:

$$\begin{aligned} (QP(t))_{ij} &= \sum_{k \in I} Q_{ik} P_{kj}(t) = Q_{ii} P_{ij}(t) + \sum_{k \in I, k \neq i} Q_{ik} P_{kj}(t) \\ &= -\lambda_i P_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \in I, k \neq i} R_{ik} P_{kj}(t) = P'_{ij}(t), \end{aligned}$$

es decir, tenemos

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in I} Q_{ik} P_{kj}(t) = (QP(t))_{ij}. \quad (1.11)$$

En particular, para $t = 0$ la ecuación (1.11) se convierte en

$$P'_{ij}(0) = \sum_{k \in I} Q_{ik} P_{kj}(0),$$

pero recordemos que $P_{kj}(0) = (Id)_{kj} = \delta_{kj}$, con lo que al final

$$P'_{ij}(0) = Q_{ij}, \quad (1.12)$$

para cualesquiera $i, j \in I$. Esto último nos da una idea de por qué la matriz Q es llamada *generador infinitesimal* de la cadena: dicha matriz indica como cambia de forma infinitesimal el proceso.

El conjunto de todas las ecuaciones (1.11) son conocidas como las *ecuaciones backward de Kolmogorov*, las cuales pueden ser condensadas usando matrices. Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial matricial con condición inicial:

Definición 1.2.5 (Ecuaciones backward de Kolmogorov).

$$\begin{cases} P'(t) = QP(t) & \forall t \in (0, \infty), \\ P(0) = Id. \end{cases} \quad (1.13)$$

La expresión $P'(t)$ representa a la matriz cuyas componentes son las derivadas de las funciones $P_{ij}(t)$, y Id es la matriz identidad. Luego, si lo que queremos es investigar las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ para cualquier tiempo $t \in (0, \infty)$, debemos investigar las ecuaciones (1.13).

Tenemos hasta ahora desarrolladas las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (1.4) y las ecuaciones backward de Kolmogorov (1.13). Antes de continuar con el estudio de estas, describiremos un conjunto de ecuaciones similares a las ecuaciones backward que también deben cumplir las probabilidades de transición.

En las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, para $s, t \geq 0$ y $i, j \in I$, tenemos

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Si aquí asumimos que el espacio de estados I es *finito*, la función $P_{ij}(t+s)$ respecto a s (que en (1.9) argumentamos era de clase C^1) es derivable y la derivada de la suma es la suma de las derivadas. En consecuencia:

$$P'_{ij}(t+s) = \left(\sum_{k \in I} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \right)' = \sum_{k \in I} P_{ik}(t)P'_{kj}(s). \quad (1.14)$$

Evaluando en 0 tenemos

$$P'_{ij}(t+0) = \sum_{k \in I} P_{ik}(t)P'_{kj}(0).$$

Pero sabemos por (1.12) que $P'_{kj}(0) = Q_{kj}$, así que juntando las últimas dos ecuaciones escritas,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in I} P_{ik}(t)Q_{kj}. \quad (1.15)$$

Si de nuevo reescribimos todas las ecuaciones (1.15) como producto de las matrices $P(t)$ y Q , tenemos la siguiente ecuación matricial:

Definición 1.2.6 (Ecuaciones forward de Kolmogorov). *Para un espacio de estados I finito, se cumple que*

$$\begin{cases} P'(t) = P(t)Q & \forall t \in [0, \infty), \\ P(0) = Id. \end{cases} \quad (1.16)$$

Algunas observaciones se encuentran a continuación:

Observación 1.2.7. *Mientras que las ecuaciones backward pueden obtenerse para cualquier conjunto I de estados, la deducción de las ecuaciones forward necesitan un espacio de estados I finito.*

Observación 1.2.8. *Aunque en este texto no será tratado, la hipótesis del espacio de estados finito en la deducción de las ecuaciones forward puede ser debilitada a un espacio I infinito y unas probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ tales que el teorema de convergencia dominada aplique, esto con la finalidad de intercambiar la suma con la derivada en la deducción (1.14) de la ecuación forward.*

La solución de las ecuaciones de Kolmogorov en sus distintas versiones significa conocer directamente las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ para cualquier $i, j \in I$ y $t \in [0, \infty)$.

1.3. Q-matrices y solución a las ecuaciones de Kolmogorov

Para dirigirnos a la solución de las ecuaciones (1.13) y (1.16), debemos estudiar su estructura, las cuales se sustentan en el generador infinitesimal de la cadena, la matriz Q . Así, un estudio más minucioso de esta matriz nos será útil. Para esto definimos una familia particular de matrices.

Definición 1.3.1. *Sea I un conjunto a lo más numerable y $Q \in M_{I \times I}(\mathbb{R})$. Decimos que Q es una Q -matriz si:*

1. $\forall i, j \in I$ con $i \neq j$ se cumple que $Q_{ij} \geq 0$,
2. $\forall i \in I$, $\sum_{j \in I} Q_{ij} = 0$.

En otras palabras, las Q -matrices sobre I son aquellas que tienen entradas no negativas fuera de la diagonal y que cumplen que $Q_{ii} = -\sum_{j \in I} Q_{ij}$, con $i \in I$.

Con esta definición a la mano, al ver el generador infinitesimal Q de una cadena de Márkov a tiempo continuo, nos encontrarnos con una Q -matriz como se ve en el siguiente resultado.

Recordemos que, si $\{R_{ij} : i, j \in I\}$ son las probabilidades de salto de la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$, entonces su generador infinitesimal es la matriz sobre I con componentes

$$Q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j, \\ \lambda_i R_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Teorema 1.3.2. *Sea Q el generador infinitesimal de la cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$. Dicha matriz cumple con ser una Q -matriz.*

Demostración. 1. Sean $i, j \in I$ con $i \neq j$. Por definición tenemos que $Q_{ij} = \lambda_i R_{ij} \geq 0$ pues λ_i es el parámetro de la variable aleatoria exponencial T_i , el cuál es no negativo, y R_{ij} es una probabilidad.

2. Sea $i \in I$. Dado que $\sum_{j \in I, j \neq i} R_{ij} = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} Q_{ij} &= \sum_{j \in I, j \neq i} Q_{ij} + Q_{ii} \\ &= \sum_{j \in I, j \neq i} \lambda_i R_{ij} - \lambda_i \\ &= \lambda_i \sum_{j \in I, j \neq i} R_{ij} - \lambda_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Las Q – matrices tienen una representación en diagramas que ilustra muy bien su comportamiento como lo podemos ver en la figura 1.5. Consideremos la cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ con espacio de estados $I = \{a, b, c, d\}$ con variables aleatorias $T_a \sim \exp(3)$, $T_b \sim \exp(2)$, $T_c \sim \exp(1)$ y $T_d \sim \exp(4)$ independientes entre sí, y con generador infinitesimal a la Q – matriz,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

Si observamos con detenimiento el diagrama y lo comparamos con la matriz, podemos notar que ambos contienen la misma información.

Una forma interesante de interpretar lo anterior es la siguiente: imaginemos que la cadena es un laberinto por donde un flujo puede acceder de un estado a otro. Las flechas rojas nos indican la cantidad total de flujo que sale del estado donde están ancladas, mientras que las flechas negras representan partes del flujo total y las posibles direcciones hacia donde salen.

Dicha cantidad total de flujo de salida de un estado $i \in \{a, b, c, d\}$ será el parámetro del tiempo de estancia T_i . Si pensamos en que la cadena se encuentra, por ejemplo, en el estado a y que tenemos “alarmas” exponenciales de parámetros iguales a cada una de las cantidades de los flujos de salida del estado, que son 1 y 2 para a , entonces la cadena cambiará de estado cuando suene la primer “alarma exponencial”, la cual se distribuye $T_a \sim \min\{\exp(1), \exp(2)\}$, variable aleatoria que se distribuye exponencial de la suma de los parámetros, es decir

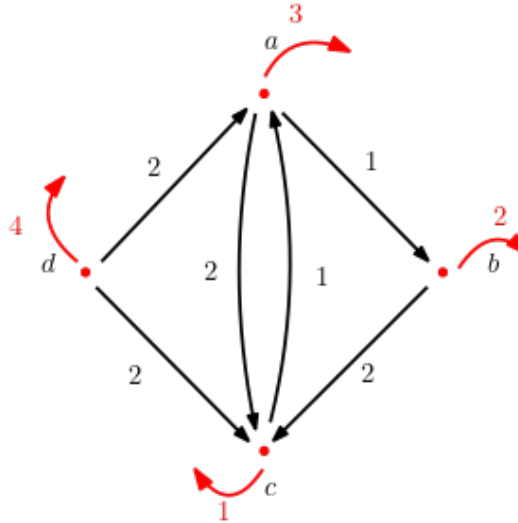


Figura 1.5: Un diagrama de una cadena con 4 estados.

$T_a \sim \exp(3)$, tal y como habíamos descrito arriba.

Y con lo anterior la propiedad de Márkov es fundamental en el proceso, pues gracias a esta se deduce que las variables aleatorias T_i se distribuyen exponencial y lo antes descrito en el diagrama es válido.

Todo lo anterior fue deducido únicamente viendo la Q -matriz de la cadena, de forma que dichas matrices tienen una estrecha relación con las cadenas de Márkov, pues logran capturar muy bien la esencia de este.

Regresemos ahora las ecuaciones de Kolmogorov. Vista su forma matricial es evidente la analogía que hay con la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} p'(t) = qp(t) & \forall t \in [0, \infty), \\ p(0) = 1, \end{cases}$$

donde $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función apropiada, y $q \in \mathbb{R}$. Dicha ecuación, análoga tanto a las ecuaciones backward como a las forward gracias a la conmutatividad del producto en \mathbb{R} , es clásica en el estudio de las ecuaciones diferenciales, y su solución única es la función exponencial

$$p(t) = e^{qt}.$$

Si nosotros quisiéramos realizar una extensión a matrices de dicha solución, tendríamos que preguntarnos qué matriz representaría la expresión

$$e^{tQ},$$

donde Q es una matriz, y verificar si en efecto es una solución a las ecuaciones backward y/o forward.

Otro camino por el cual encontramos esta expresión es recordar el caso discreto. Ahí la matriz de probabilidades a cualquier tiempo $n \in \mathbb{N}$ estaba representada por la matriz P^n , donde P era la matriz de transición a un paso. Nosotros quisiéramos “rellenar” los espacios que quedan entre dichas potencias, cambiando así el parámetro discreto n por uno continuo t .

En la recta real esta tarea es relativamente sencilla: si tenemos una sucesión de potencias $\{p^n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ con $p \in \mathbb{R}$, una manera de extender dicha sucesión de potencias naturales a una correspondencia con potencias en todo el intervalo $[0, \infty)$ es utilizar la función exponencial ya que para cualquier $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$p^n = e^{n \log(p)}.$$

Luego, el conjunto $\{e^{t \log(p)} : t \geq 0\}$ tiene parámetro continuo y recupera la sucesión p^n original cuando $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Volviendo al caso de las cadenas de Márkov a tiempo discreto, tenemos una sucesión de potencias de matrices $\{P^n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, así que, siguiendo de cerca el caso para los reales y asumiendo que la exponencial de una matriz está definida, el conjunto $\{e^{tM} : t \geq 0\}$ es un buen candidato para extender la sucesión de potencias de matrices, donde M es una matriz que debe comportarse de cierta forma como la expresión $\log(p)$ en el caso numérico. Intuitivamente la matriz M sería el generador infinitesimal Q de la cadena de Márkov continua.

Hemos hallado la exponencial de una matriz como una expresión conveniente para resolver las ecuaciones forward y backward. Dicha expresión tiene sentido si suponemos que el conjunto I es finito, y la teoría que respecta a la exponencial de una matriz finita se puede encontrar en el apéndice A del presente texto. Así, con la intuición anterior y habiendo desarrollado la teoría necesaria respecto a la solución de las ecuaciones, establecemos el siguiente resultado para cadenas de Márkov con espacio de estados I finito:

Teorema 1.3.3. *Sea Q una matriz sobre un conjunto finito I . Sea $P(t) = e^{tQ}$. Entonces $\{P(t) : t \geq 0\}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $P(s+t) = P(s)P(t)$ para cualesquiera $s, t \geq 0$.
2. $\{P(t) : t \geq 0\}$ es la única solución a las ecuaciones backward de Kolmogorov

$$\begin{cases} P'(t) = QP(t) & \forall t \in [0, \infty), \\ P(0) = Id. \end{cases}$$

3. $\{P(t) : t \geq 0\}$ es la única solución a las ecuaciones forward de Kolmogorov

$$\begin{cases} P'(t) = P(t)Q & \forall t \in [0, \infty), \\ P(0) = Id. \end{cases}$$

4. Para cualquier $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ se cumple

$$\frac{d^m}{dt^m} P(t)|_{t=0} = Q^m.$$

5. Q es una Q -matriz si y sólo si e^{tQ} es una matriz estocástica.

Demostración. 1. Esta proposición se deduce del corolario A.7 del apéndice A.

2. Para cualesquiera $i, j \in I$, la serie de potencias

$$(P(t))_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!}$$

tiene radio de convergencia infinito según lo visto en A.6 y además es derivable término a término en todo \mathbb{R} , por lo que la derivada de la serie matricial es

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}Q \cdot Q^{n-1}}{n!} = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} = QP(t), \quad (1.17)$$

donde $(tQ)^0 = Id$ es la matriz identidad en el conjunto I , solucionando las ecuaciones backward.

Finalmente, la unicidad en el caso backward se obtiene de la siguiente forma: supongamos que existe $\{M(t) : t \geq 0\}$ tal que cumple las ecuaciones backward. Sean $i, j \in I$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-tQ}M(t))_{ij} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k \in I} (e^{-tQ})_{ik} (M(t))_{kj} \right) \\ &= \sum_{k \in I} \frac{d}{dt} [(e^{-tQ})_{ik}] (M(t))_{kj} + (e^{-tQ})_{ik} \frac{d}{dt} [(M(t))_{kj}], \end{aligned}$$

pero sabemos que $P(t) = e^{-tQ}$ y $M(t)$ satisfacen las ecuaciones backward, así que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in I} \frac{d}{dt} [(e^{-tQ})_{ik}] (M(t))_{kj} + (e^{-tQ})_{ik} \frac{d}{dt} [(M(t))_{kj}] \\
&= \sum_{k \in I} -(e^{-tQ}Q)_{ik} (M(t))_{kj} + (e^{-tQ})_{ik} (QM(t))_{kj} \\
&= -(e^{-tQ}QM(t))_{ij} + (e^{-tQ}QM(t))_{ij} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las entradas de la matriz $e^{-tQ}M(t)$ son todas constantes. Y usando la condición inicial de las ecuaciones backward, tenemos que

$$e^{-0Q}M(0) = Id \cdot Id = Id,$$

por lo que las matrices e^{-tQ} y $M(t)$ son inversas para cualquier $t > 0$. Pero por la propiedad de semigrupo, $e^{tQ}e^{-tQ} = e^{tQ-tQ} = e^{0Q} = Id$ y por unicidad de la matriz inversa, $M(t) = e^{tQ} = P(t)$.

3. La demostración es análoga a la de las ecuaciones backward pues nótese que en (1.17) es posible intercambiar $P(t)$ y Q gracias a que, para cualquier $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $(tQ)^j = Q(tQ)^{j-1} = (tQ)^{j-1}Q$ por lo que la deducción de (1.17) también resuelve las ecuaciones forward. En la unicidad el resultado se obtiene derivando el producto $M(t)e^{-tQ}$ en vez de $e^{-tQ}M(t)$.
4. Usando inducción y derivando término a término en cada componente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m} (P(t))_{ij} &= \frac{d^m}{dt^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{t^{n-m}}{(n-m)!} (Q^{n-m}Q^m)_{ij} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{t^{n-m}}{(n-m)!} \sum_{k \in I} (Q^{n-m})_{ik} (Q^m)_{kj} \\
&= \sum_{k \in I} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ik}}{n!} \right) (Q^m)_{kj} = \sum_{k \in I} (e^{tQ})_{ik} (Q^m)_{kj},
\end{aligned}$$

y finalmente evaluando en $t = 0$ tenemos que

$$\frac{d^m}{dt^m} (P(t))_{ij}|_{t=0} = \sum_{k \in I} (e^{0Q})_{ik} (Q^m)_{kj} = \sum_{k \in I} (Id)_{ik} (Q^m)_{kj} = (Q^m)_{ij},$$

como queríamos.

5. Supongamos que Q es una Q -matriz, veamos que $P(t) = e^{tQ}$ es una matriz estocástica:

- a) Consideremos primero las entradas fuera de la diagonal. Por hipótesis, $\forall i, j \in I$ con $i \neq j$, $Q_{ij} \geq 0$. Por otro lado, de la definición de $P(t)$, para $i, j \in I$:

$$(P(t))_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} = (Id)_{ij} + (tQ)_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!},$$

pero sabemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} = O(t^2) \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

es decir, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tales que $\forall t \in (0, \varepsilon)$,

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \right| \leq Mt^2. \quad (1.18)$$

Con lo anterior, denotando $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{Q_{ij}}{M}\}$ y tomando $t \in (0, \delta]$, obtenemos que $Q_{ij} \geq Mt$ y así:

$$\begin{aligned} (P(t))_{ij} &= (Id)_{ij} + (tQ)_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \\ &\geq (tQ)_{ij} - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \right| \\ &\geq tQ_{ij} - Mt^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para una $t > 0$ arbitraria, usando el inciso 1 demostrado antes tenemos que para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$P(t) = P\left(\underbrace{\frac{t}{k} + \frac{t}{k} + \dots + \frac{t}{k}}_{k \text{ veces}}\right) = \left(P\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k,$$

de forma que, para cada $i, j \in I$, podemos seleccionar una $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{k} \leq \delta$, y usando lo demostrado antes, los términos $(P(\frac{t}{k}))_{ij}$ serán no negativos y con ello sus potencias también, así que las entradas de la matriz de transición $P(t)$ que no pertenecen a la diagonal son no negativas.

En el caso cuando $i = j$ ya tenemos que $(Id)_{ii} = 1$, así que el argumento es similar pero usando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ii}}{n!} = O(t) \text{ cuando } t \rightarrow 0,$$

de forma que todas las entradas de la matriz $P(t)$ son no negativas

- b) Sea $i \in I$. Como Q es una Q -matriz la suma de sus renglones es 0, y así para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} (Q^n)_{ij} &= \sum_{j \in I} (Q^{n-1}Q)_{ij} = \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} (Q^{n-1})_{ik} Q_{kj} \\ &= \sum_{k \in I} (Q^{n-1})_{ik} \sum_{j \in I} Q_{kj} = \sum_{k \in I} (Q^{n-1})_{ik} (0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, cualquier potencia de una Q -matriz suma en sus renglones 0. Con esto, un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} (P(t))_{ij} &= \sum_{j \in I} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} = \sum_{j \in I} \left((Id)_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \right) \\ &= (Id)_{ii} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j \in I} (Q^n)_{ij} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $P(t) = e^{tQ}$ es una matriz estocástica, probemos que Q es una Q -matriz :

- a) Sean $i, j \in I$ con $i \neq j$. Por hipótesis, para cualquier $t \geq 0$,

$$(P(t))_{ij} = (Id)_{ij} + (tQ)_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \geq 0.$$

Usando que $(Id)_{ij} = 0$ y la desigualdad (1.18), para $t \in (0, \varepsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (tQ)_{ij} &\geq - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \\ &\geq - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((tQ)^n)_{ij}}{n!} \right| \\ &\geq -Mt^2. \end{aligned}$$

Cancelando $t > 0$ obtenemos $Q_{ij} > -Mt$, y tomando límite cuando $t \rightarrow 0$ concluimos que $Q_{ij} \geq 0$.

- b) Sabemos que $\sum_{j \in I} (P(t))_{ij} = 1$ por lo que derivando y evaluando en 0:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{j \in I} (P(t))_{ij} = 0.$$

Pero habíamos hallado que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (P(t))_{ij} = Q_{ij},$$

por lo que concluimos

$$\sum_{j \in I} Q_{ij} = 0.$$

■

Este resultado nos da finalmente la solución a las ecuaciones forward y backward para el caso finito, lo cual se traduce en una expresión para las probabilidades de transición.

En cuanto al caso infinito, dado que la teoría que concierne a la exponencial de una matriz solamente contempla matrices finitas, la solución dada en el teorema anterior no es válida.

A pesar de ello, las ecuaciones backward siempre son cumplidas por el proceso, y como se dijo en 1.2.8, bajo ciertas condiciones las forward también, así que permanecen válidas las expresiones de (1.13) y (1.16), y una solución de ellas es cualquier matriz de funciones $\{(P(t))_{ij} : i, j \in I\}$, que satisfaga las infinitas ecuaciones diferenciales (1.11) y (1.15).

En este caso, es posible demostrar la existencia de una solución mínima no negativa $\{P(t) : t \geq 0\}$, para ambos conjuntos de ecuaciones, en donde la minimalidad se entiende de la siguiente forma: si $P(t)$ es la solución hallada y $M(t)$ es otra solución no negativa, entonces $\forall i, j \in I$ y $t \geq 0$,

$$P_{ij}(t) \leq M_{ij}(t).$$

Dicha solución forma un semigrupo de matrices, es decir, cumple la primera proposición del teorema 1.3.3.

La demostración de lo anterior se omite en este texto, pero se puede encontrar en [5, sección 2.8].

1.4. Clases de comunicación

Ahora que conocemos mejor la naturaleza de las cadenas de Márkov a tiempo continuo, procedemos a estudiar propiedades que conciernen a sus estados y la forma en cómo se conectan entre ellos. Algunos resultados son análogos a aquellos de la versión discreta.

La primera definición que necesitamos es precisamente la de comunicación entre dos estados:

Definición 1.4.1. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov y sean $i, j \in I$ dos de sus estados. Decimos que j es accesible desde i (o que i accede a j), si existe un tiempo $t \geq 0$ tal que $P_{ij}(t) > 0$. Denotamos dicha situación como $i \rightarrow j$.

Además, si ocurre que $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, decimos que i se comunica con j , lo cual denotamos como $i \leftrightarrow j$.

Un resultado básico sobre la relación de comunicación es el siguiente:

Teorema 1.4.2. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov. La relación de comunicación es una relación de equivalencia sobre su espacio de estados I .

Demostración. 1. Sea $i \in I$. Por definición de las probabilidades de transición, $P_{ii}(0) = 1 > 0$. Así, $i \rightarrow i$ y por lo tanto $i \leftrightarrow i$.

2. La simetría es inmediata de la definición.

3. Sean $i, j, k \in I$ y supongamos $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$, es decir, $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$, $j \rightarrow k$ y $k \rightarrow j$.

Por un lado, como $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow k$ entonces existen $s, t \geq 0$ tales que $P_{ij}(t) > 0$ y $P_{jk}(s) > 0$. Así, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (ver (1.4)):

$$P_{ik}(s+t) = \sum_{l \in I} P_{il}(s)P_{lk}(t) \geq P_{ij}(t)P_{jk}(s) > 0,$$

de donde concluimos que $i \rightarrow k$. Usando el resto de las hipótesis obtenemos de forma análoga que $k \rightarrow i$. Concluimos que $i \leftrightarrow k$. ■

Tenemos la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 1.4.3. En una cadena de Márkov, la relación de comunicación induce una partición sobre su espacio de estados I . A las clases que conforman dicha partición se les conoce como clases de comunicación.

Un caso notable en una cadena de Márkov se da cuando hay solo una clase de comunicación. Tal característica la destacamos a continuación:

Definición 1.4.4. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov. Decimos que la cadena es irreducible si todos los estados se comunican entre sí.

Ahora, para continuar con las propiedades de los estados de la cadena de Márkov a tiempo continuo, introduciremos una cadena de Márkov a tiempo discreto asociada a la primera con el fin de trasladar algunos resultados de cadenas discretas al caso continuo.

Definición 1.4.5. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo. Definimos el proceso a tiempo discreto $(Y_n)_{n \geq 0}$ como sigue:

$$\forall n \geq 0, Y_n := X_{W_n},$$

en donde $(W_n)_{n \geq 0}$ son los tiempos de salto de la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$.

Con la definición anterior, es de esperarse el siguiente resultado:

Teorema 1.4.6. Sean $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo y $(Y_n)_{n \geq 0}$ la cadena a tiempo discreto definida en 1.4.5. Entonces $(Y_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Márkov a tiempo discreto con distribución inicial $Y_0 = X_0$ y matriz de transición igual a la matriz de probabilidad de saltos P de la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$.

Para una prueba de este teorema, se puede consultar [5, sección 2.8]. Una vez que tenemos definida la cadena discreta anterior, a continuación se presenta un resultado que nos dice que en efecto, esta cadena recupera bien el comportamiento entre los estados de la cadena a tiempo continuo. Además, nos provee de otros resultados útiles más adelante.

Teorema 1.4.7. Sean $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo, $Q = \{Q_{ij} : i, j \in I\}$ su generador infinitesimal, $(Y_n)_{n \geq 0}$ su cadena a tiempo discreto adyacente, y $i, j \in I$ dos estados tales que $i \neq j$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $i \longrightarrow j$ en la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$.
2. $i \longrightarrow j$ en la cadena $(Y_n)_{n \geq 0}$.
3. Existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ tales que $Q_{ix_1} \cdot Q_{x_1x_2} \cdot \dots \cdot Q_{x_nj} > 0$.
4. $\forall t > 0, P_{ij}(t) > 0$.
5. $\exists t > 0$ tal que $P_{ij}(t) > 0$.

Demostración. La implicación $4 \implies 5$ es evidente, mientras que las implicaciones $5 \implies 1$ y $1 \implies 2$ se desprenden directamente de las definiciones de accesibilidad entre estados, y de la definición de cadena de Márkov adyacente, respectivamente.

$2 \implies 3$. Como $i \longrightarrow j$ en $(Y_n)_{n \geq 0}$, y también $i \neq j$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $P_{ij}^{n_0} > 0$, y usando n_0 veces las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov para el caso discreto, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, distintos en forma consecutiva y tales que $P_{ix_1} \cdot P_{x_1x_2} \cdot \dots \cdot P_{x_nj} > 0$.

De lo anterior notamos también que, al ser posible el acceso del estado x_k al x_{k+1} , $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dichos estados no son absorbentes, y así $\lambda_i, \lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \dots, \lambda_{x_n}, \lambda_j$ son todas cantidades positivas, pues estas son los parámetros de los tiempos de

estancia exponenciales correspondientes a cada estado. Así, recordando la definición del generador infinitesimal Q ,

$$Q_{ix_1} \cdot Q_{x_1x_2} \cdot \dots \cdot Q_{x_{n-1}x_n} = (\lambda_{ix_1} P_{ix_1})(\lambda_{x_1x_2} P_{x_1x_2}) \cdot \dots \cdot (\lambda_{x_{n-1}x_n} P_{x_{n-1}x_n}) > 0.$$

3 \implies 4. Sea $t \geq 0$. Comenzamos por la siguiente observación:

$$\forall i \in I, \forall s > 0, P_{ii}(s) > 0. \quad (1.19)$$

En efecto, por definición de las probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} P_{ii}(s) &= \mathbb{P}(X_s = i | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_s = i, T_i > s | X_0 = i) + \mathbb{P}(X_s = i, T_i \leq s | X_0 = i) \\ &\geq \mathbb{P}(X_s = i, T_i > s | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(T_i > s | X_0 = i) \\ &= e^{-\lambda_i s} > 0, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usa que, bajo la condición $X_0 = i$ se tiene la igualdad $\{X_s = i, T_i > s\} = \{T_i > s\}$ pues si la cadena salta de i por primera vez estrictamente después del instante s , entonces $X_s = i$.

Dicho lo anterior, supongamos en principio que $Q_{ij} > 0$. Al ser $P_{ij}(t)$ las soluciones a las ecuaciones de Kolmogorov, en particular en las backward tenemos

$$P'_{ij}(0) = Q_{ij} > 0.$$

Así, como $i \neq j$,

$$P'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_{ij}(0+h) - P_{ij}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_{ij}(h)}{h} > 0,$$

de donde se desprende que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall 0 < h < \varepsilon, P_{ij}(h) > 0$.

Finalmente, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, para $u > 0$ arbitrario y $h \in (0, \varepsilon)$ tal que $0 < h < u$,

$$P_{ij}(u) = \sum_{k \in I} P_{ik}(h) P_{kj}(u-h) \geq P_{ij}(h) P_{jj}(u-h) > 0,$$

en donde en la penúltima desigualdad se usa la observación (1.19) con $s = u-h$. Con esto hemos probado la afirmación para el caso $Q_{ij} > 0$.

Regresemos ahora al caso general: existen x_1, \dots, x_n estados tales que $Q_{ix_1} \cdot Q_{x_1x_2} \cdot \dots \cdot Q_{x_{n-1}x_n} > 0$. Entonces cada una de esas entradas del generador infinitesimal es positiva, por lo que según lo deducido antes, $P_{ix_1}(u) > 0, P_{x_{n-1}x_n}(u) > 0$

y $P_{x_k x_{k+1}}(u) > 0$ para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y cualquier instante $u > 0$.

Para concluir, sea $t > 0$ arbitrario. Luego, usando $n+1$ veces las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, y lo deducido arriba antes para $u = \frac{t}{n+1}$,

$$P_{ij}(t) \geq P_{ix_1}\left(\frac{t}{n+1}\right)P_{x_1 x_2}\left(\frac{t}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot P_{x_n j}\left(\frac{t}{n+1}\right) > 0.$$

■

Como ya hemos dicho, la equivalencia de 1 y 2 nos permite estudiar los estados de una cadena a tiempo continuo analizando la cadena discreta, en donde podemos usar resultados que se han desarrollado para el caso discreto.

Además, el resultado anterior es bastante importante en el estudio de las clases de comunicación de las cadenas de Márkov a tiempo continuo, pues la equivalencia de las condiciones 3 y 4 es poderosa, ya que entonces si una cadena es irreducible, la probabilidad de ir de un estado a otro en cualquier momento siempre es positiva, y no está atada a algún instante o a algún intervalo de tiempo específico, como en principio nos indica la definición.

Presentamos por último algunas definiciones que conciernen a los estados de la cadena, análogas a aquellas del caso discreto, y que, como en este último, serán importantes para estudiar el comportamiento a largo plazo de la cadena.

Definición 1.4.8. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov y $i \in I$ uno de sus estados. Decimos que i es un estado

- **Transitorio**, si $\mathbb{P}_i(t > 0 : X_t = i \text{ es acotado}) = 1$.
- **Recurrente**, si $\mathbb{P}_i(t > 0 : X_t = i \text{ es acotado}) = 0$.

Los resultados principales acerca de los conceptos anteriores siguen muy de cerca sus análogos en el caso discreto.

Teorema 1.4.9. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo y sea $(Y_n)_{n \geq 0}$ su cadena a tiempo discreto adyacente. Las siguientes proposiciones se cumplen:

- Si $i \in I$ es un estado recurrente para la cadena $(Y_n)_{n \geq 0}$, entonces i es recurrente para $(X_t)_{t \geq 0}$.
- Si $i \in I$ es un estado transitorio para la cadena $(Y_n)_{n \geq 0}$, entonces i es transitorio para $(X_t)_{t \geq 0}$.
- Todo estado es un estado recurrente o transitorio.
- La recurrencia y la transitividad son propiedades de clase.

La demostración de este y otros resultados referentes a la clasificación de estados se pueden encontrar en [5, sección 3.4].

1.5. Distribuciones estacionarias y distribuciones límite

Para concluir nuestro estudio sobre las cadenas de Márkov a tiempo continuo, nos preguntamos por el equilibrio de la cadena así como su comportamiento a largo plazo.

Cuando se piensa en la idea de un equilibrio para la cadena, típicamente se piensa en un vector de distribución Π tal que al momento de aplicarle la matriz $P(t)$, obtengamos el mismo vector. Una aproximación burda a tal concepto está conformada por un vector inicial $\nu \in \mathbb{R}^I$ tal que al momento de aplicarle la matriz $P(t)$, obtengamos a ν de nuevo, aunque no necesariamente ν sea un vector de probabilidad. Tal es el caso de una medida estacionaria.

Definición 1.5.1. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov, y sea $\nu \in \mathbb{R}^I$ un vector. Decimos que ν es una medida estacionaria (o invariante) para la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0, \nu P(t) = \nu.$$

Un ejemplo sencillo de una medida invariante para alguna cadena de Márkov $(X_t)_{t \geq 0}$ está dada por el vector cuyas entradas son todas 0, denotado por $\nu = \bar{0}$.

Finalmente si nosotros tenemos una medida estacionaria $\nu \in \mathbb{R}^I$, que a su vez es distribución de probabilidad, estamos ante el concepto de distribución estacionaria:

Definición 1.5.2. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov, y sea $\Pi \in \mathbb{R}^I$ una distribución de probabilidad. Decimos que Π es una distribución estacionaria (o invariante) para la cadena $(X_t)_{t \geq 0}$ si Π es una medida estacionaria.

En principio, la definición de distribución estacionaria se complica bastante en el caso continuo, ya que por definición se pide una igualdad para cualquier $t > 0$, además de que generalmente $P(t)$ no es una matriz fácilmente calculable, aún cuando el espacio de estados es finito. Sin embargo, una caracterización muy útil de las distribuciones invariantes para una cadena $(X_t)_{t \geq 0}$ en términos de su Q -matriz asociada viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 1.5.3. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov con generador infinitesimal Q . Entonces $\Pi \in \mathbb{R}^I$ es una distribución estacionaria para la cadena si y sólo si $\Pi Q = \bar{0}$, con $\bar{0}$ el vector cuyas entradas son todas 0.

Demostración. Proporcionamos una prueba en el caso en que el espacio de estados es finito.

- Supongamos que $\forall t \geq 0, \Pi P(t) = \Pi$.

Si derivamos la expresión anterior componente a componente, tenemos, para cada $j \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\Pi_j) = \frac{d}{dt}(\Pi P(t))_j \\ &= \sum_{i \in I} \Pi_i P'_{ij}(t), \end{aligned}$$

y usando la ecuación forward, intercambiando las sumas y aplicando la hipótesis,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in I} \Pi_i \left(\sum_{k \in I} P_{ik}(t) Q_{kj} \right) \\ &= \sum_{k \in I} \left(\sum_{i \in I} \Pi_i P_{ik}(t) \right) Q_{kj} \\ &= \sum_{k \in I} \Pi_k Q_{kj} \\ &= (\Pi Q)_j. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\Pi Q = \bar{0}$.

- Supongamos ahora que $\Pi Q = \bar{0}$.

Si procedemos de forma similar a lo hecho antes pero ocupando ahora la ecuación backward, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Pi P(t))_j &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i \in I} \Pi_i P_{ij}(t) \right) \\ &= \sum_{i \in I} \Pi_i P'_{ij}(t) \\ &= \sum_{i \in I} \Pi_i \left(\sum_{k \in I} Q_{ik} P_{kj}(t) \right) \\ &= \sum_{k \in I} \left(\sum_{i \in I} \Pi_i Q_{ik} \right) P_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in I} (\Pi Q)_k P_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in I} 0 \cdot P_{ik}(t) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = (\Pi P(t))_j$ es constante, y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$(\Pi P(t))_j = \Pi_j.$$



Una prueba del resultado anterior en el caso en el que el espacio de estados es infinito se puede encontrar en [5, sección 3.5].

A diferencia del caso discreto, en el caso continuo la aleatoriedad de las variables T_i , nos permiten prescindir del concepto de periodicidad, facilitando así el estudio del comportamiento a largo plazo de las probabilidades $P_{ij}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Llegamos al último resultado sobre el comportamiento estacionario y a largo plazo de las cadenas, el cual es análogo al resultado para el caso discreto salvo la ausencia de la hipótesis de aperiodicidad.

Teorema 1.5.4. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov irreducible, con distribución estacionaria $\Pi \in \mathbb{R}^I$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \Pi_j.$$

La demostración se puede encontrar en [5, sección 3.6]

1.6. Ejemplos

En esta última sección revisaremos tres ejemplos concretos en los cuales aplicaremos los resultados antes expuestos.

1.6.1. Cadena con dos estados

Como primer ejemplo, consideremos el conjunto $I = \{0, 1\}$, y supongamos que $(X_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Márkov a tiempo continuo con I como su espacio de estados.

Supongamos que el proceso comienza en $X_0 = 0$, y que permanece en dicho estado por un tiempo exponencial $T_0 \sim \exp(\lambda)$ (con $\lambda > 0$) después del cuál salta al estado $i = 1$, en donde permanece por un tiempo exponencial $T_1 \sim \exp(\mu)$ (con $\mu > 0$), luego del cual nuevamente salta al estado $i = 0$, repitiendo este comportamiento indefinidamente. Asumimos que las variables aleatorias T_0 y T_1 son independientes entre sí.

Esta cadena puede ser pensada como un modelo para la siguiente situación: supongamos que una cierta máquina es nueva, y comienza a funcionar al tiempo $t = 0$. Dicha máquina trabaja por una cantidad de tiempo aleatoria que se distribuye $\exp(\lambda)$ y, una vez transcurrido ese tiempo, la máquina se descompone, tardando esta en repararse una cantidad de tiempo aleatoria que se distribuye $\exp(\mu)$, tiempo después del cuál ésta queda como nueva y otra vez es puesta en

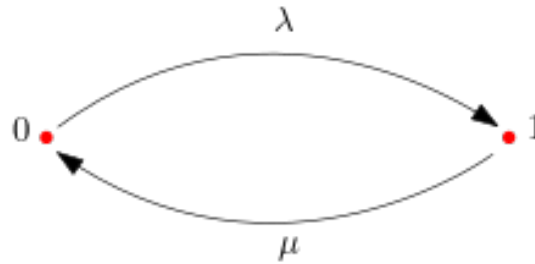


Figura 1.6: Diagrama de una cadena de Márkov con dos estados.

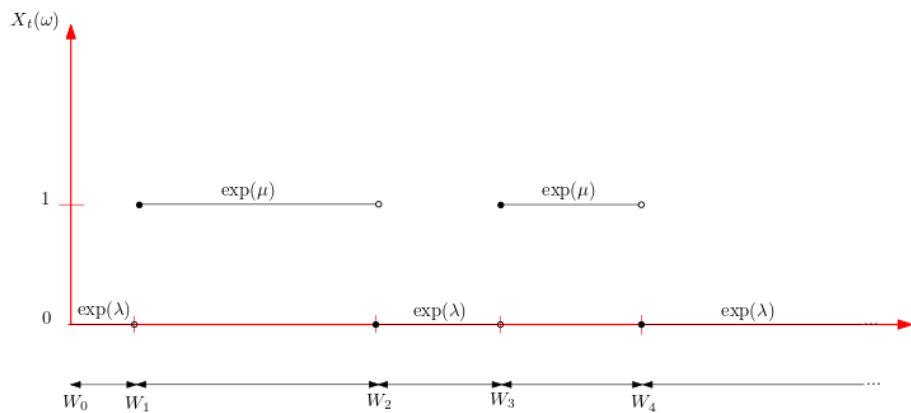


Figura 1.7: Trayectoria de una cadena de Márkov con dos estados.

funcionamiento.

Podemos modelar el comportamiento de tal máquina haciendo que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ indique el estado en el que se encuentra la máquina en el instante $t \geq 0$, donde el estado $i = 0$ puede ser interpretado como que la máquina está descompuesta (y por lo tanto apagada), y el estado $i = 1$ aquél que indica cuando la máquina está funcionando, y en donde, al ser los tiempos de reparación y de funcionamiento variables exponenciales, se asume que el funcionamiento de la máquina tiene un comportamiento markoviano, es decir, dado el estado actual de la máquina, su comportamiento futuro no cambia su a pesar de haber sido reparada muchas o pocas veces anteriormente, o de llevar mucho o poco tiempo funcionando.

Para esta cadena podemos encontrar de forma explícita muchas cantidades de interés. Comenzamos por obtener la información que determina de forma única a la cadena.

Matriz de saltos: la matriz de saltos P de esta cadena viene dada por las

probabilidades de salto R_{ij} para $i, j \in \{0, 1\}$, a saber, las cantidades R_{00}, R_{01}, R_{10} y R_{11} . Recordemos que estas son las probabilidades de ir a alguno de los estados de la cadena en los instantes de salto $(W_n)_{n \geq 0}$ partiendo de un estado i , con $i \neq j$.

En el caso de la cadena con dos estados, las cantidades anteriores son sencillas: por un lado siempre asumimos que $R_{ii} = 0$ para cualquier estado $i \in I$, ya que de esta forma en el momento en que la cadena salte nos aseguramos que en efecto salga del estado i y se dirija a un estado distinto. Por otro lado, al llegar un tiempo de salto, al no poder saltar al mismo estado en el que se encuentre, con probabilidad 1 se dirige al único otro estado de la cadena. De esta forma, encontramos que $R_{00} = R_{11} = 0$, mientras que $R_{10} = R_{01} = 1$. Por lo tanto, la matriz de saltos P tiene la siguiente forma:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Parámetros de los tiempos de estancia: de la descripción de la cadena notamos que $T_0 \sim \exp(\lambda)$ y $T_1 \sim \exp(\mu)$ son los tiempos de estancia correspondientes a cada estado, y dichas variables aleatorias son exponenciales, independientes entre sí, y de parámetros $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ respectivamente. De esto último también se deduce que los estados son no absorbentes.

Ya que hemos obtenido la matriz P y los parámetros λ, μ anteriores tenemos toda la información que caracteriza a nuestra cadena con dos estados y con tales datos podemos construir el generador infinitesimal Q de la cadena.

Generador infinitesimal de una cadena con dos estados: directamente de la definición tenemos que $Q_{00} = -\lambda$, ya que dicha cantidad es el parámetro del tiempo de estancia de la variable T_0 . Así mismo $Q_{11} = -\mu$. Usando lo anterior y las propiedades demostradas de las Q -matrices, o bien por definición del generador, concluimos que $Q_{01} = \lambda$ y $Q_{10} = \mu$. Luego, la Q -matriz asociada a nuestra cadena con dos estados es:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Lo siguiente que nos proponemos es encontrar la forma explícita de las ecuaciones backward y forward para este ejemplo, y encontrar su solución usando la teoría de las exponenciales de las Q -matrices desarrollada antes.

Ecuaciones de Kolmogorov para una cadena con dos estados: recordemos la forma general de las ecuaciones backward:

$$\begin{cases} P'(t) = QP(t) & \forall t \in [0, \infty), \\ P(0) = Id. \end{cases}$$

Conociendo tanto la matriz Q como el espacio de estados, la ecuación matricial anterior se convierte en

$$\begin{pmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{pmatrix},$$

con $P_{00}(0) = P_{11}(0) = 1$ y $P_{01}(0) = P_{10}(0) = 0$ como condición inicial. Calculando el producto anterior obtenemos las ecuaciones backward para una cadena con dos estados, que son reescritas en las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t), \\ P'_{01}(t) &= -\lambda P_{01}(t) + \lambda P_{11}(t), \\ P'_{10}(t) &= \mu P_{00}(t) - \mu P_{10}(t), \\ P'_{11}(t) &= \mu P_{01}(t) - \mu P_{11}(t). \end{aligned}$$

De forma análoga, obtenemos las ecuaciones forward para esta cadena:

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t), \\ P'_{01}(t) &= \lambda P_{00}(t) - \mu P_{01}(t), \\ P'_{10}(t) &= -\lambda P_{10}(t) + \mu P_{11}(t), \\ P'_{11}(t) &= \lambda P_{10}(t) - \mu P_{11}(t). \end{aligned}$$

Pasamos ahora a la solución de las ecuaciones, es decir, a calcular la matriz de probabilidades de transición del proceso.

Matriz de probabilidades de transición: de acuerdo a lo expuesto en 1.3.3, y usando los resultados del apéndice A, la solución a las ecuaciones anteriores está dada por $P(t) = e^{tQ}$.

Cálculos sencillos nos llevan a determinar que la matriz Q de una cadena con dos estados es diagonalizable, cumpliéndose el siguiente producto:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{\mu} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ \frac{-\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{pmatrix},$$

donde se pueden apreciar las matrices de cambio de base y la matriz diagonal asociada a Q . Por último, como la diagonalización de una matriz no cambia con el producto escalar, usando el teorema A.9 con la matriz tQ y haciendo los

cálculos,

$$\begin{aligned} P(t) = e^{tQ} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{\mu} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ -\frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, las probabilidades de transición para cualquier $t \geq 0$ están dadas por:

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{01}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Pasemos ahora a analizar la estructura de los estados y su comunicación para esta cadena.

Comunicación en una cadena con dos estados: se deduce inmediatamente de las probabilidades de transición antes halladas que la cadena es irreducible, ya que $P_{01}(t) > 0$ y $P_{10}(t) > 0$ inclusive para cualquier $t > 0$.

Su cadena discreta adyacente $(Y_n)_{n \geq 0}$ tiene por matriz de transición a la matriz de saltos

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

la cual es fácilmente manejable.

Distribuciones estacionarias y distribuciones límite: usando la caracterización del resultado 1.5.3 sobre distribuciones estacionarias, si un vector de probabilidad $\Pi = (\pi_0, \pi_1)$ es una distribución estacionaria entonces:

$$(\pi_0 \quad \pi_1) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = (0 \quad 0),$$

y junto al hecho de que la suma de los elementos de Π debe ser 1, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0, \\ \lambda\pi_0 - \mu\pi_1 &= 0, \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1. \end{aligned}$$

Solucionando dicho sistema obtenemos que $\Pi = (\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ es la única distribución estacionaria para la cadena con dos estados.

Y por último, usando que la cadena es irreducible y que conocemos la distribución invariante Π de la cadena, podemos asegurar que $\forall i, j \in \{0, 1\}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j,$$

lo cual en este caso podemos comprobar que ocurre, pues si revisamos de nuevo las expresiones para las probabilidades de transición,

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ P_{01}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ P_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ P_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \end{aligned}$$

en todas ellas el término exponencial tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, convergiendo las probabilidades a π_0 o a π_1 según sea el caso.

1.6.2. El proceso de Poisson

Estudiamos ahora un proceso estocástico bastante conocido, el cuál estará presente también el siguiente capítulo: el proceso de Poisson.

Este proceso resulta ser una cadena de Márkov a tiempo continuo, pues en sus distintas caracterizaciones es posible demostrar que cumple la propiedad de Márkov. A pesar de ser un ejemplo de un proceso con espacio de estados infinito, es un proceso sencillo de describir. Además el proceso de Poisson tiene bastantes aplicaciones, y es a menudo utilizado como base para la construcción de procesos más complicados. Con el objetivo de estudiar dicho proceso visto como cadena de Márkov, vamos a partir asumiendo que en efecto lo es y describiremos su comportamiento para deducir posteriormente las cantidades que lo caracterizan.

Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo con espacio de estados $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, no decreciente, tal que $X_0 = 0$, y sea $\lambda > 0$. Si para cada $i \in I$ la cadena permanece por un tiempo exponencial $T_i \sim \exp(\lambda)$ en ese estado, de tal forma que los tiempos de estancia sean independientes entre sí, y además al ocurrir el salto, la cadena se dirige con probabilidad 1 únicamente al estado $i + 1$, entonces tal cadena de Márkov es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

Dicho proceso puede ser pensado como modelo para la situación siguiente: supongamos que en un cierto establecimiento nos proponemos estudiar la cantidad y la forma en cómo llegan los clientes cuando el lugar abre sus puertas. En un inicio el establecimiento tiene 0 clientes, y conforme el tiempo transcurre, estos van llegando al lugar. Es razonable suponer que los tiempos aleatorios que tardan en llegar los clientes son independientes entre sí, y aunque algo menos realista, suponemos que esos tiempos se distribuyen de la misma forma y tienen la propiedad de pérdida de memoria. No se toma en cuenta cuando el cliente

abandona el establecimiento.

De esta forma, X_t representaría la cantidad de personas que han entrado en el establecimiento al tiempo t , la cuál aumenta una unidad precisamente cuando un cliente llega, mientras que T_i sería el tiempo que transcurre entre la llegada del cliente i y el $i + 1$. Con todo esto, ya podemos describir las cantidades que caracterizan al proceso:

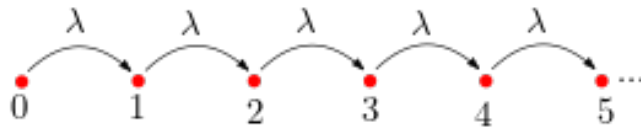


Figura 1.8: Diagrama de un proceso de Poisson.

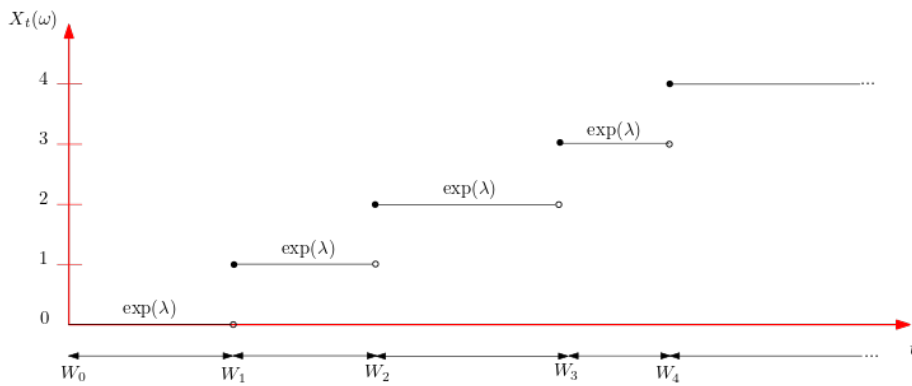


Figura 1.9: Trayectoria de un proceso de Poisson

Matriz de saltos: directamente de la descripción del proceso, si la cadena se encuentra en un estado $i \in I$ y nos ubicamos en alguno de los tiempos de salto, esta salta al estado $i + 1$ con probabilidad 1. Lo anterior para cualquier $i \in I$, por lo que $\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por lo que la matriz de saltos tiene la siguiente forma:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots$$

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Parámetros de los tiempos de estancia: también de la descripción del proceso, el tiempo de estancia en cada estado se distribuye $\exp(\lambda)$, es decir, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}, T_i \sim \exp(\lambda)$. El hecho de que λ sea positivo nos indica que los estados de un proceso de Poisson no son absorbentes.

Con estas cantidades procedemos a encontrar el generador infinitesimal de esta cadena.

Generador infinitesimal del proceso de Poisson: usando nuevamente la definición de esta matriz y las probabilidades anteriores notamos que $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}, Q_{ii+1} = \lambda$ y $Q_{ii} = -\lambda$, mientras que si $j \neq i, i+1$, entonces $Q_{ij} = 0$, por lo que esta matriz toma la siguiente forma:

$$Q = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ecuaciones de Kolmogorov para el proceso de Poisson: aquí nos encontramos con dos sistemas de infinitas ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones backward en su forma matricial toman la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) & \cdots \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A pesar de lo complejo que pueda aparentar ser el producto anterior, las ecuaciones se reducen de forma significativa gracias a la definición del proceso de Poisson, pues al ser un proceso estrictamente creciente,

$$\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ tales que } i > j, P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = 0,$$

ya que el proceso sólo puede permanecer en el estado i durante un tiempo aleatorio pero finito, y cuando salta, lo hace siempre hacia el estado $i+1$, por lo que es imposible que la cadena regrese a un estado anterior a i .

De esta forma, las ecuaciones backward se trivializan para las parejas de estados $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tales que $i > j$. Con esta simplificación, obtenemos las ecuaciones backward para estados $i, j \in I$ con $i \geq j$:

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) &= (QP(t))_{ij} \\ &= \sum_{k \in I} Q_{ik} P_{kj}(t) \\ &= -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i+1j}(t), \end{aligned}$$

donde solo se ha usado la definición del generador Q del proceso de Poisson.

Con respecto a las ecuaciones forward, aquí hay una diferencia importante respecto a las cadenas de Márkov con una cantidad finita de estados. Recordemos que en la definición 1.2.6 asumimos que el espacio de estados I es finito, no obstante, este es un ejemplo de un proceso en el cual a pesar eso, las ecuaciones forward pueden ser deducidas sin problema. Realizando los cálculos con las simplificaciones necesarias, estas ecuaciones toman la forma siguiente:

$$\forall i, j \in I \text{ tales que } i \geq j, \quad P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\lambda P_{i0}(t) & \text{si } j = 0, \\ -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{ij-1}(t) & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

Matriz de probabilidades de transición: resolver los sistemas de ecuaciones anteriores no resulta tarea complicada. Por ejemplo, para las ecuaciones backward, dado que $P_{ij}(t) = 0$ cuando $i < j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, la situación se facilita. Así, para el caso $i = j$, la ecuación respectiva se convierte en

$$P'_{ii}(t) = -\lambda P_{ii}(t) + \lambda P_{i+1i}(t) = -\lambda P_{ii}(t),$$

de forma que $P_{ii}(t) = Ke^{-\lambda t}$, para cierta constante K , la cuál usando la condición inicial $P_{ii}(0) = 1$ resulta ser igual a 1. Así, $P_{ii}(t) = e^{-\lambda t}$, para cualquier $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Si ahora queremos resolver $P'_{ii+1}(t) = -\lambda P_{ii+1}(t) + \lambda P_{i+1i+1}(t)$, usando el resultado anterior, a la función $\mu(x) = e^{\lambda x}$ como factor integrante, y a la condición inicial $P_{ii+1}(0) = 0$, hallamos que

$$P_{ii+1}(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t).$$

Un razonamiento inductivo nos lleva a encontrar que, para $i, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$P_{ii+k}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

tal y como se espera de un proceso de Poisson de parámetro λ : $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ para cualquier $t \geq 0$.

Comunicación en el proceso de Poisson: de las probabilidades de transición halladas, se deduce que $\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, si $i < j$ entonces $i \rightarrow j$ pero $j \not\rightarrow i$ ya que el proceso de Poisson avanza con probabilidad uno al estado siguiente, así que solo podemos acceder a estados posteriores al actual.

De lo anterior se deduce que los estados del proceso de Poisson son todos transitorios: eventualmente la cadena visitará todos los estados y sólo lo hará una vez. Además, su cadena adyacente $(Y_n)_{n \geq 0}$ está caracterizada por la matriz de saltos del Poisson:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Nótese que, al tener la cadena adyacente tal matriz, podemos concluir que $\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $Y_n = n$.

Distribuciones estacionarias y distribuciones límite: dado que todos los estados de la cadena son transitorios, esta no posee una distribución estacionaria. Para probar esto de forma rigurosa podemos echar un vistazo a la caracterización del resultado 1.5.3: sea Π un vector de probabilidad en el espacio de estados $I = \{1, 2, 3, \dots\}$. Si dicho vector es una distribución estacionaria, entonces por definición de la matriz Q :

$$(\Pi Q)_1 = \sum_{k \in I} \Pi_k Q_{k1} = -\lambda \Pi_1 = 0,$$

de donde $\Pi_1 = 0$ necesariamente, pues estamos suponiendo que $\lambda > 0$. Pero ahora para el segundo valor:

$$(\Pi Q)_2 = \sum_{k \in I} \Pi_k Q_{k2} = \lambda \Pi_1 - \lambda \Pi_2 = 0,$$

de donde $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$. Usando inducción, tenemos que para cualquier $i \in I$, $\Pi_i = 0$ por lo que Π debe ser el vector $\bar{0}$, el cuál no puede ser un vector de probabilidad. Así, tal distribución estacionaria no existe.

La ausencia de una distribución estacionaria implica la no existencia de una distribución límite.

1.6.3. Procesos de nacimiento y muerte

Como último ejemplo que presentamos están los procesos de nacimiento y muerte. Estos procesos son bastante similares a los procesos de Poisson, aunque incorporan características que los hacen más generales, lo que los hace útiles

para modelar fenómenos como una población de cierta especie. Comenzamos por describir a un proceso de nacimiento y muerte.

Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Márkov a tiempo continuo, con espacio de estados $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Si para cada $i \in I$, existen variables aleatorias independientes $M_i \sim \exp(\mu_i)$ y $S_i \sim \exp(\sigma_i)$, con $\mu_i \geq 0$, $\sigma_i \geq 0$ si $i > 0$ y $\sigma_0 = 0$, de tal forma que la cadena permanece durante un tiempo aleatorio igual al mínimo entre las variables M_i y S_i en el estado i , al cabo del cuál aumenta en una unidad si $\min(M_i, S_i) = M_i$ o disminuye una unidad si $\min(M_i, S_i) = S_i$, entonces $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de nacimiento y muerte.

Como se dijo antes, este tipo de procesos pueden ser utilizados para modelar el tamaño de una población a cualquier tiempo t , la cuál experimenta nacimientos o muertes (y por lo tanto aumento o disminución de la población) de forma aleatoria e independiente, y tal que el tiempo que la población mantenga un cierto número de individuos solo depende de tal número, sin importar la cantidad de nacimientos, muertes, o tamaños de población anteriores.

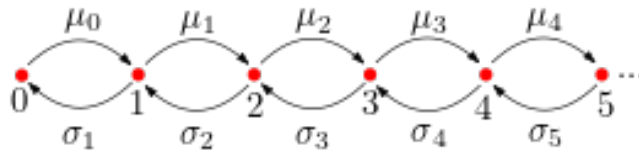


Figura 1.10: Diagrama de una cadena de nacimiento y muerte general.

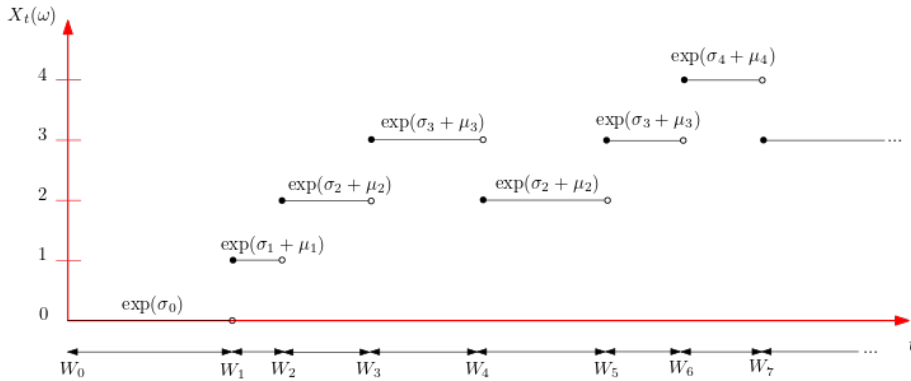


Figura 1.11: Trayectoria de una cadena de nacimiento y muerte general.

De esta forma, X_t representa el tamaño de la población al tiempo $t > 0$ mientras que las variables independientes y exponenciales M_i y S_i representan el tiempo que tarda en ocurrir un nacimiento o una muerte, respectivamente, sabiendo que hay $i \in I$ individuos en nuestra población. La propiedad de Márkov

garantiza que el comportamiento futuro del proceso sólo dependa del tamaño de población en el que se encuentra.

Un hecho destacable es que los parámetros μ_i y σ_i pueden ser 0, lo que otorga variedad a los procesos de nacimiento y muerte, dependiendo de la configuración de dichos parámetros. Dos casos notables son los siguientes:

- **Un proceso de nacimiento puro:** es un proceso de nacimiento y muerte en donde, $\forall i \in I, \sigma_i = 0$.
- **Un proceso de muerte puro:** es un proceso de nacimiento y muerte en donde, $\forall i \in I, \mu_i = 0$.

Conforme avancemos en las propiedades de los procesos de nacimiento y muerte como cadenas de Márkov, analizaremos brevemente estos casos particulares. A continuación estudiamos las propiedades de estos procesos como cadenas de Márkov:

Matriz de saltos: usando la descripción del proceso, si la cadena se sitúa en un estado $i \in I$ con $i > 0$ los únicos estados a donde se puede acceder al momento de saltar son $i + 1$ y $i - 1$, luego, la probabilidad de la cadena de ir del estado i a estados distintos a los anteriores es 0. Claramente si estamos ubicados en $i = 0$, solo tendremos la posibilidad de ir al estado 1 con probabilidad 1, sin embargo para un estado $i > 1$ debemos calcular la probabilidad de ir al estado $i + 1$ o al $i - 1$, es decir. En un modelo de una población esto equivale a calcular la probabilidad de que, habiendo i individuos, ocurra un nacimiento o una muerte. Notemos que

$$R_{ii+1} = \mathbb{P}(X_{T_i} = i + 1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(\text{mín}\{M_i, S_i\} = M_i) = \mathbb{P}(M_i < S_i),$$

pero M_i y S_i son variables aleatorias independientes y exponenciales de parámetros μ_i y σ_i respectivamente, y un resultado conocido de estas distribuciones nos dice que

$$\mathbb{P}(M_i < S_i) = \frac{\mu_i}{\sigma_i + \mu_i},$$

es decir que la probabilidad de que una variable exponencial sea menor a otra con la misma distribución, es la razón del parámetro de la primera respecto a la suma de los parámetros de ambas. Análogamente obtenemos para $i > 0$ que

$$R_{ii-1} = \mathbb{P}(S_i < M_i) = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \mu_i}.$$

Así, la matriz de saltos para un proceso de nacimiento y muerte general se ve de la siguiente forma:

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\mu_1}{\sigma_1 + \mu_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \mu_2} & 0 & \frac{\mu_2}{\sigma_2 + \mu_2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{\sigma_3 + \mu_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Parámetros de los tiempos de estancia: de nuestra descripción del proceso, para cada $i \in I$, $T_i \sim \min(M_i, S_i)$, y dado que $M_i \sim \exp(\mu_i)$ y $S_i \sim \exp(\sigma_i)$, usando el resultado mencionado anteriormente acerca del mínimo de variables aleatorias exponenciales, concluimos que $T_i \sim \exp(\sigma_i + \mu_i)$. Si para cada $i \in I$ renombramos la suma de los parámetros como: $\lambda_i := \sigma_i + \mu_i$, tenemos que las variables aleatorias exponenciales T_i son independientes entre sí y tienen parámetros λ_i .

Generador infinitesimal de una cadena de nacimiento y muerte: construimos la Q – matriz asociada a una cadena de nacimiento y muerte. Por definición para cualquier $i \in I$, $Q_{ii} = -\lambda_i = -(\sigma_i + \mu_i)$, mientras que $Q_{ii+1} = \lambda_i R_{ii+1} = (\sigma_i + \mu_i) \frac{\mu_i}{\sigma_i + \mu_i} = \mu_i$, y análogamente, para $i > 1$, $Q_{ii-1} = \sigma_i$. Por las probabilidades R_{ij} , el resto de las entradas de la matriz son cero. Luego, el generador infinitesimal tiene la siguiente forma:

$$Q = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & 0 & \dots \\ \sigma_1 & -(\sigma_1 + \mu_1) & \mu_1 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2 & -(\sigma_2 + \mu_2) & \mu_2 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_3 & -(\sigma_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ecuaciones de Kolmogorov para procesos de nacimiento y muerte: las ecuaciones backward para este tipo de procesos toman la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) & \dots \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & \dots \\ \sigma_1 & -(\sigma_1 + \mu_1) & \dots \\ 0 & \sigma_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & \dots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A diferencia del proceso de Poisson, en principio las ecuaciones backward no pueden simplificarse para determinados estados, ya que la cadena podría acceder a todos los estados según los parámetros σ_i y μ_i . Así, las ecuaciones en forma analítica quedan de la siguiente forma:

$$\forall i, j \in I, \quad P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu_0 P_{0j}(t) + \mu_0 R_{1j} & si \ i = 0, \\ \sigma_i P_{i-1j}(t) - (\sigma_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \mu_i P_{i+1j}(t) & si \ i > 0, \end{cases}$$

y en el caso de las ecuaciones forward, así como en el Poisson, a pesar de que el espacio de estados es infinito su deducción se puede justificar y toman la siguiente forma:

$$\forall i, j \in I, P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu_0 P_{i0}(t) + \sigma_1 R_{i1} & \text{si } j = 0, \\ \mu_{j-1} P_{ij-1}(t) - (\sigma_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \sigma_{j+1} P_{ij+1}(t) & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

Matriz de probabilidades de transición: dada la generalidad de las descripciones hechas hasta el momento, no es posible encontrar una solución explícita para las ecuaciones backward y forward expuestas antes. Sin embargo haciendo ciertas suposiciones sobre los parámetros μ_i y σ_i podemos hallar expresiones explícitas para estas. Un par de ejemplos que muestran lo anterior son los *procesos de nacimiento puro* y los *procesos de muerte puro*, que presentamos a continuación:

- **Procesos de nacimiento puro:** son procesos de nacimiento y muerte en donde todos los parámetros de las variables S_i (con distribución exponencial) que modelan el tiempo que tarda en ocurrir alguna muerte, son cero, es decir, $\forall i \in I, \sigma_i = 0$. Notemos que esto significa que la probabilidad de que las variables S_i sean finitas es 0, pues para cualquier $x \geq 0$,

$$F_{S_i}(x) = \mathbb{P}(S_i \leq x) = 1 - e^{-\sigma_i x} = 1 - e^{0 \cdot x} = 1 - 1 = 0.$$

Así, intuitivamente los tiempos que tarda en ocurrir una muerte habiendo cualquier cantidad de población, es infinito. Por ello, este tipo de procesos pueden modelar fenómenos de crecimiento de poblaciones en donde las pérdidas de individuos son irrelevantes.

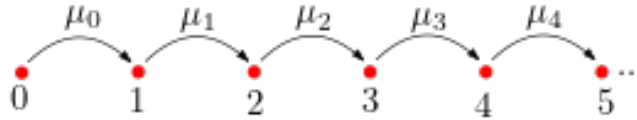


Figura 1.12: Diagrama de un proceso de nacimiento puro.

Si sustituimos los datos de estos procesos directamente en la matriz P de los procesos de nacimiento y muerte generales, la matriz de saltos y la Q -matriz asociada a los procesos de nacimiento puro toman las siguientes formas:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\mu_1 & \mu_1 & \cdots \\ 0 & 0 & -\mu_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

De esto se desprende que los procesos de nacimiento puro son procesos en donde al saltar de un estado $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ nos dirigimos al estado $i + 1$

con probabilidad 1, y tales que los tiempos de estancia T_i se distribuyen $\exp(\mu_i)$, es decir, la rapidez con la que ocurre un nacimiento en nuestro modelo depende del tamaño de la población $i \in I$. Nótese que si para todo $i \in I$, $\mu_i = \lambda$ para un cierto $\lambda > 0$ fijo, estamos ante un proceso de Poisson de parámetro λ . Con esto, los procesos de nacimiento puro son muy similares a los de Poisson, pero son más generales en el sentido de que ahora los parámetros de los tiempos de interarribo exponenciales cambian según el estado $i \in I$ en el que se encuentre la cadena.

Sustituyendo los datos en las ecuaciones backward, y recordando que ahora para cualquier $t > 0$, $P_{ij}(t) = 0$ si $i > j$ (la cadena no puede acceder a estados anteriores al que se encuentre), estas toman la siguiente forma: $\forall i, j \in I$,

$$P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu_i P_{ii}(t) & \text{si } i = j, \\ -\mu_i P_{ij}(t) + \mu_i P_{i+1j}(t) & \text{si } j \geq i + 1, \end{cases}$$

mientras que con las mismas consideraciones sobre el espacio de estados, las ecuaciones forward toman la siguiente forma: $\forall i, j \in I$,

$$P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\mu_j P_{jj}(t) & \text{si } i = j, \\ \mu_{j-1} P_{ij-1}(t) - \mu_j P_{ij}(t) & \text{si } j - 1 \geq i. \end{cases}$$

Finalmente para encontrar la matriz de probabilidades de transición, al tener estas cadenas un espacio de estados infinito, no podemos usar las herramientas del apéndice A. Sin embargo, es posible encontrar una solución de las ecuaciones forward. La deducción de dichas soluciones es análoga a la presentada en los procesos de muerte pura, por lo que aquí en los procesos de nacimiento la omitimos, presentando simplemente la expresión de las probabilidades de transición:

Teorema 1.6.1. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de nacimiento puro. Entonces para cualquier $i, j \in I$ con $i \leq j$, las probabilidades de transición están dadas por:*

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\mu_j t} & \text{si } i = j, \\ \mu_{j-1} e^{-\mu_j t} \int_0^t P_{ij-1}(s) e^{\mu_j s} ds & \text{si } i < j. \end{cases}$$

- **Procesos de muerte pura:** en estos procesos ahora los parámetros de las variables M_i que modelan el tiempo que tarda en llegar un nacimiento, son todos ellos cero, es decir, $\forall i \in I$, $\mu_i = 0$, lo que implica que las variables M_i son infinitas con probabilidad 1 usando el mismo argumento visto en los procesos de nacimiento puro. Al contrario de estos últimos, los

procesos de nacimiento y muerte podrían modelar poblaciones en donde el surgimiento de nuevos individuos es irrelevante

La idea en este tipo de procesos es que la cadena comience en un estado $k \geq 0$, que intuitivamente indicará la población que hay en el instante 0, y posteriormente irá avanzando hacia estados anteriores, es decir la población irá decreciendo conforme vayan ocurriendo las muertes. Así, al llegar al estado $i = 0$, la cadena se estancará para siempre.

Lo anterior se puede justificar, pues análogamente a los procesos de nacimiento puro, para cada $i \in I$ los tiempos de interarribo T_i se distribuyen exponencial de parámetro σ_i , y notemos que la igualdad inicial $\sigma_0 = 0$ nos indica precisamente que el parámetro del tiempo de interarribo T_0 con distribución exponencial es 0, mostrándonos que si la cadena eventualmente llega al estado $i = 0$, el tiempo en el que ocurre un evento (que solo cabría esperar que ocurriera una muerte en estos procesos no ocurren nacimientos) es infinito con probabilidad 1.

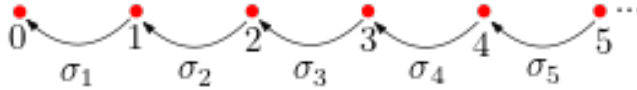


Figura 1.13: Diagrama de un proceso de muerte puro.

Con todo lo anterior, la matriz de saltos y el generador infinitesimal de los procesos de muerte pura toman la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sigma_1 & -\sigma_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & -\sigma_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

en donde el vector $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una distribución de probabilidad cualquiera. Nótese que esta posibilidad de agregar un vector de distribución de probabilidad cualquiera en la matriz de saltos P hace que la cadena de Markov a tiempo discreto adyacente al proceso de nacimiento y muerte no sea única.

Recordemos que las cantidades R_{ij} indican la probabilidad de ir de un estado i a un estado j una vez pasado el tiempo de interarribo T_i . No obstante, dado que aquí el tiempo T_0 es infinito con probabilidad 1, las probabilidades R_{0i} para cualquier $i \in I$ son irrelevantes. Sin embargo la distribución es puesta con el fin de que la matriz P siga siendo estocástica.

Idealmente en la cadena a tiempo discreto adyacente, el estado 0 debería quedarse en el estado 0 con probabilidad 1 en el siguiente paso, sin embargo dado que en la cadena de Markov a tiempo continuo es necesaria la condición de que, al momento de saltar, la cadena vaya a un estado distinto del estado actual, esta posibilidad queda descartada.

Dado que en los procesos de muerte pura la cadena siempre tiende a avanzar hacia los estados anteriores, tenemos que para cualquier $t > 0$ y cualesquiera $i, j \in I$ con $i > j$, $P_{ij}(t) = 0$. Con esto en mente, las ecuaciones backward para un proceso de muerte pura toman la siguiente forma: $\forall i, j \in I$,

$$P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\sigma_i P_{ii}(t) & \text{si } i = j, \\ -\sigma_i P_{ij}(t) + \sigma_i P_{i+1j}(t) & \text{si } j \leq i + 1, \end{cases}$$

mientras que las ecuaciones forward toman la siguiente forma: $\forall i, j \in I$,

$$P'_{ij}(t) = \begin{cases} -\sigma_j P_{jj}(t) & \text{si } i = j, \\ -\sigma_j P_{ij}(t) + \sigma_{j+1} P_{ij+1}(t) & \text{si } j - 1 \leq i. \end{cases}$$

Y de nuevo para encontrar la matriz de probabilidades de transición, deducimos una solución a las ecuaciones forward en el siguiente resultado.

Teorema 1.6.2. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de nacimiento puro. Entonces las probabilidades de transición para cualquier $i, j \in I$ con $i \geq j$, satisfacen la siguiente ecuación integral:*

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\sigma_j t} & \text{si } i = j, \\ \sigma_{j+1} e^{-\sigma_j t} \int_0^t P_{ij+1}(s) e^{\sigma_j s} ds & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Demostración. En el caso $i = j$, las ecuaciones forward nos dicen que

$$P'_{jj}(t) = \sigma_j P_{jj}(t),$$

de donde integrando directamente y usando la condición inicial $P_{jj}(0) = 1$ obtenemos

$$P_{jj}(t) = e^{-\sigma_j t}.$$

Notemos que cuando $i = j = 0$, al ser $\sigma_0 = 0$, obtenemos que $\forall t \geq 0$, $P_{00}(t) = 1$ lo cual es de esperarse dado que del estado $i = 0$ la cadena no puede saltar a otro estado sin importar el tiempo que transcurra.

Supongamos ahora que $i > j$. Consideramos primero la ecuación

$$P'_{i0}(t) = \sigma_1 P_{i1}(t),$$

la cual integrando directamente nos permite ver que

$$P_{i0}(t) = \sigma_1 \int_0^t P_{i1}(s) ds + c,$$

pero usando la condición inicial $R_{i0} = \delta_{i0}$ y $i > 0$, concluimos que $\delta_{i0} = 0$ y por lo tanto $P_{i0}(0) = 0 = c$, así que

$$\forall i > 0, \quad P_{i0}(t) = \sigma_1 \int_0^t P_{i1}(s) ds.$$

Por otro lado, si tomamos ahora la ecuación completa

$$P'_{ij}(t) = -\sigma_j P_{ij}(t) + \sigma_{j+1} P_{ij+1}(t),$$

podemos usar el método del factor integrante, de modo que la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \sigma_{j+1} e^{\sigma_j t} P_{ij+1}(t) &= e^{\sigma_j t} P'_{ij}(t) + \sigma_j e^{\sigma_j t} P_{ij}(t) \\ &= \frac{d}{dt} (e^{\sigma_j t} P_{ij}(t)), \end{aligned}$$

por lo que integrando a ambos lados,

$$P_{ij}(t) = \sigma_{j+1} e^{-\sigma_j t} \int_0^t P_{ij+1}(s) e^{\sigma_j s} ds + c.$$

Finalmente usando la condición inicial $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, obtenemos que $c = 0$. ■

Comunicación en los procesos de nacimiento y muerte:

Distribuciones estacionarias y distribuciones límite: comenzamos por un resultado que nos permitirá determinar cuándo una cadena de nacimiento y muerte irreducible tiene una distribución estacionaria.

Teorema 1.6.3. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de nacimiento y muerte irreducible. Entonces $\forall n \geq 0$, $\mu_n > 0$ y $\sigma_{n+1} > 0$.*

Demostración. Por el resultado 1.4.7, al ser irreducible la cadena de nacimiento y muerte, $\forall i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$Q_{ix_1} Q_{x_1 x_2} \cdots Q_{x_{n-1} x_n} Q_{x_n j} > 0.$$

De esta forma, para un estado $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Q_{NN+1} > 0$ pues incluso es la única forma de acceder a $N + 1$ desde N . Pero $Q_{NN+1} = \mu_N$ tal como se puede ver en la Q -matriz de la cadena.

Análogamente, para una $N \in \mathbb{N}$, $\sigma_N = Q_{NN-1} > 0$, ya que de hecho es la única forma de acceder al estado $N - 1$ partiendo del estado N . ■

Con el resultado anterior podemos demostrar un resultado que caracteriza la existencia de una distribución estacionaria y límite en una cadena de nacimiento y muerte irreducible.

Teorema 1.6.4. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de nacimiento y muerte irreducible. Entonces el proceso tiene distribución estacionaria si y sólo si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k} < \infty.$$

En tal caso, la distribución estacionaria Π está dada por

$$\Pi_n = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} & \text{si } n = 0, \\ \frac{\frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Además, dicha distribución es la distribución límite.

Demostración. 1. Supongamos primero que existe una distribución invariante $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ para la cadena. Entonces por la proposición 1.5.3, tenemos que

$$\Pi \cdot Q = (-\mu_0 \pi_0 + \sigma_1 \pi_1, \mu_0 \pi_0 - (\mu_1 + \sigma_1) \pi_1 + \sigma_2 \pi_2, \dots) = \bar{0},$$

donde Q es el generador infinitesimal del proceso de nacimiento y muerte y $\bar{0}$ es el vector de ceros. Obtenemos así un sistema de infinitas ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu_0 \pi_0 = \sigma_1 \pi_1, \\ \mu_0 \pi_0 + \sigma_2 \pi_2 - (\mu_1 + \sigma_1) \pi_1 = 0, \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \pi_{n-1} + \sigma_{n+1} \pi_{n+1} - (\mu_n + \sigma_n) \pi_n = 0, \\ \vdots \end{cases}$$

Al sustituir la primera ecuación en la segunda tenemos:

$$\mu_0 \pi_0 + \sigma_2 \pi_2 - (\mu_1 + \sigma_1) \pi_1 = -\mu_0 \pi_2 + \sigma_2 \pi_2 - \mu_1 \pi_1 - \mu_0 \pi_0 = 0,$$

es decir,

$$\mu_1 \pi_1 = \sigma_2 \pi_2,$$

de forma que nuestro sistema de ecuaciones original es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0\pi_0 = \sigma_1\pi_1, \\ \mu_1\pi_1 = \sigma_2\pi_2, \\ \mu_1\pi_1 + \sigma_3\pi_3 - (\mu_2 + \sigma_2)\pi_2 = 0, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Usando un argumento inductivo podemos reescribir el sistema de ecuaciones original para obtener el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0\pi_0 = \sigma_1\pi_1, \\ \mu_1\pi_1 = \sigma_2\pi_2, \\ \vdots \\ \mu_n\pi_n = \sigma_{n+1}\pi_{n+1}, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Usando la n -ésima ecuación del sistema podemos obtener una expresión para π_n en términos de π_{n-1} :

$$\frac{\mu_{n-1}\pi_{n-1}}{\sigma_n} = \pi_n.$$

Repitiendo el procedimiento para π_{n-1} resulta que

$$\frac{\mu_{n-2}\pi_{n-2}}{\sigma_{n-1}} = \pi_{n-1}.$$

Si combinamos las ecuaciones anteriores, podemos obtener una expresión para π_n en términos de π_{n-2} . Usando inducción podemos deducir que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n = \frac{\mu_0\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n} \cdot \pi_0,$$

pero al ser Π una distribución, $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0\mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k} \cdot \pi_0 + \pi_0 = 1.$$

Al tener la suma un valor finito se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0\mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k} < \infty,$$

y además

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}}.$$

Por lo tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n = \frac{\frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}}.$$

Hemos hallado que, si la cadena tiene distribución invariante, entonces la penúltima suma es finita y además hemos hallado la distribución invariante de forma explícita.

2. Supongamos ahora que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k} < \infty$ y proponemos a la distribución Π mencionada antes como la distribución invariante de la cadena. Notemos que el vector Π está bien definido, pues por hipótesis el denominador de la expresión π_n es finito.

Por otro lado, para cualquier $n \geq 0$, $\pi_n \geq 0$ pues μ_n y σ_n son cantidades positivas. Además, notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n + \pi_0 \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} \right) \\ &= \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, el vector Π en efecto es una distribución. Finalmente veamos que es una distribución invariante usando nuevamente 1.5.3. Sea $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Desarrollando el producto:

$$(\Pi Q)_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k q_{kj}.$$

Consideramos dos casos. Si $j = 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k q_{k0} &= -\mu_0 \pi_0 + \sigma_1 \pi_1 \\ &= \frac{-\mu_0}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} + \frac{\sigma_1 \frac{\mu_0}{\sigma_1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que si $j > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k q_{kj} &= -\mu_{j-1} \pi_{j-1} - (\mu_j + \sigma_j) \pi_j + \sigma_{j+1} \pi_{j+1} \\
&= \frac{\mu_{j-1} \frac{\mu_{j-2} \cdots \mu_0}{\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} - \frac{\sigma_j \frac{\mu_{j-1} \cdots \mu_0}{\sigma_j \cdots \sigma_1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} \\
&\quad - \frac{\mu_j \frac{\mu_{j-1} \cdots \mu_0}{\sigma_j \cdots \sigma_1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} + \frac{\sigma_{j+1} \frac{\mu_j \cdots \mu_0}{\sigma_{j+1} \cdots \sigma_1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando el teorema 1.5.4, al ser $(X_t)_{t \geq 0}$ irreducible y Π anteriormente descrita la distribución estacionaria de la cadena, entonces Π es la distribución límite de la cadena. ■

En cuanto a los procesos de nacimiento puros, dado que $\forall n \geq 0, \sigma_n = 0$ y que estamos asumiendo que $\forall n \geq 0, \mu_n > 0$, estos procesos no poseen distribuciones estacionarias como era de esperarse, pues intuitivamente, al no haber posibilidad de muerte en el proceso y por lo tanto de retroceder a estados anteriores, la cadena tenderá a crecer conforme $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.6.5. *Si $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de nacimiento puro, entonces $(X_t)_{t \geq 0}$ no tiene distribuciones estacionarias.*

Demostración. Supongamos que Π es una distribución estacionaria para la cadena. Hallaremos una expresión para sus componentes usando de nuevo el resultado 1.5.3. Sea $j > 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
(\Pi Q)_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k Q_{kj} = \pi_{j-1} Q_{j,j-1} + \pi_j Q_{j,j} + \pi_{j+1} Q_{j,j+1} \\
&= \pi_{j-1} \sigma_{j-1} - \pi_j (\mu_j + \sigma_j) + \pi_{j+1} \mu_{j+1} \\
&= -\mu_j \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y como para cualquier $n \geq 0, \mu_n > 0$, podemos dividir y tenemos

$$\pi_{j+1} = \frac{\pi_j \mu_j}{\pi_{j+1}},$$

de forma que la expresión de la componente $j + 1$ del vector ΠQ queda determinada por la componente j , para cualquier $j > 0$. En particular para $j = 0$,

$$(\Pi Q)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k Q_{kj} = \pi_0 Q_{00} + \pi_1 Q_{10} = -\pi_0 \mu_0 + \pi_1 \sigma_0 = -\pi_0 \mu_0 = 0,$$

y al ser $\mu_0 > 0$, tenemos que $\pi_0 = 0$. Combinando lo anterior y usando inducción, concluimos que para cualquier $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\pi_j = 0$, contradiciendo la suposición de que Π era una distribución estacionaria. ■

Sin embargo, en los procesos de muerte puros existe una distribución estacionaria, la cuál está dada por el vector $\Pi = (1, 0, 0, 0, \dots)$. En efecto, si consideramos la Q -matriz de un proceso de muerte puro y realizamos el producto ΠQ , obtenemos que

$$(\Pi Q)_j = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i Q_{ij} = \Pi_0 Q_{0j} = 1 \cdot 0 = 0,$$

donde recordamos que la matriz Q es tal que $Q_{0j} = 0$ para cualquier columna j , ya que estamos asumiendo que el proceso es de muerte pura y por lo tanto $\mu_0 = 0$ en particular.

Con ello, $(\Pi Q)_j = 0$ para cualquier $j \geq 0$ y así, $\Pi Q = \bar{0}$, así que por el resultado 1.5.3, la distribución Π es una distribución invariante para la cadena. Dicho resultado es intuitivo: la cadena está en equilibrio si directamente desde el inicio, comenzamos en el estado 0 con probabilidad 1.

Para concluir este ejemplo de procesos y el capítulo de cadenas de Márkov, presentamos un ejemplo de teoría de colas.

Ejemplo 1.6.6. *Supongamos que tenemos un sistema $M/M/1$, es decir, clientes llegan a una fila siguiendo un proceso de Poisson de parámetro $\mu > 0$ y son despachados según un proceso de Poisson de parámetro $\sigma > 0$. Entonces podemos modelar la longitud de la cola como una cadena de nacimiento y muerte, donde $\forall n \geq 0$, $\mu_n = \mu$, y similarmente $\forall n \geq 1$, $\sigma_n = \sigma$. La idea es que las muertes en la cadena representen a los clientes que han sido despachados, mientras que los nacimientos representen a los clientes que van llegando.*

De esta forma, la cadena de nacimiento y muerte es irreducible, y por lo tanto usando el resultado 1.6.4 se sigue que esta tendrá una distribución estacionaria (y por lo tanto límite) si y solo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_{k-1}}{\sigma_1 \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{\sigma^k} < \infty,$$

pero la última expresión se trata de una serie geométrica, la cuál converge si y solo si $\frac{\mu}{\sigma} < 1$, es decir, si $\mu < \sigma$. De esta manera, el proceso que modela la cola tendrá una distribución estacionaria (y límite) dada por:

$$\Pi_n = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^k} = 1 - \frac{\mu}{\sigma} & \text{si } n = 0, \\ \frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^n}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^k} = \left(1 - \frac{\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^n & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

El resultado anterior es esperable: la cola encuentra un equilibrio conforme el tiempo transcurre solamente cuando la tasa μ de llegada de los clientes es menor a la tasa σ a la que son despachados.

Capítulo 2

Teoría de renovación

Un aspecto muy importante en las cadenas de Márkov a tiempo continuo estudiadas en el capítulo pasado, es que en dichos procesos nos encontramos sucesiones de variables aleatorias $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, independientes entre sí y que indican los tiempos de interarribo de los eventos que ocurren en el proceso, a saber, de los instantes en los cuales las cadenas saltan de un estado a otro. Estas sucesiones de variables cuentan con una distribución exponencial, ya sea de un mismo parámetro (como en el caso de los procesos de Poisson) o de distintos parámetros (como en un proceso de nacimiento y muerte). Esta característica les confiere varias propiedades a las cadenas, pues la distribución exponencial es única al poseer la propiedad de pérdida de memoria, la cual es trascendente a la hora de establecer algunos resultados.

No obstante, con el fin de modelar fenómenos de la vida real usando procesos a tiempo continuo, la distribución exponencial de dichas variables aleatorias no siempre está justificada. De hecho es mucho más razonable asumir que en un fenómeno que involucre eventos relativamente similares que se suceden unos a otros, la distribución de los tiempos que hay entre cada evento sea fija, pero arbitraria. Así, con una distribución cualquiera y no una distribución exponencial se perderán propiedades que las cadenas gozan, como la propiedad de Márkov, pero a cambio se obtiene mayor realismo en el modelado con procesos estocásticos del fenómeno en cuestión. Esta es la idea detrás de los procesos de Renovación.

2.1. Definición y primeras propiedades

Supongamos que $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde $\forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(T_i \leq x) = F(x),$$

con $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función de distribución tal que $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T_i \leq 0) = F(0) = 0.$$

Lo anterior nos dice que las variables T_i son positivas con probabilidad 1. Estas representan el tiempo de vida del i -ésimo evento, o en otras palabras, el tiempo que tarda en ocurrir el evento $i + 1$ desde que sucedió el evento i .

Con la sucesión de variables $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ representado los lapsos de tiempo entre cada evento podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, a la variable W_n como sigue:

$$W_n := \sum_{i=1}^n T_i,$$

donde convenimos que $W_0 \equiv 0$. De esta forma, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, W_n es la variable que representa el instante en el que el n -ésimo evento ocurre, siendo $W_0 \equiv 0$ el momento en el que comienza el proceso.

Notemos que la definición anterior nos dice que la sucesión de variables W_n es creciente con probabilidad 1, pues las variables T_i son positivas casi seguramente. Más aún, con lo anterior podemos definir el siguiente proceso de conteo:

$$\forall t \in [0, \infty), \quad N_t := \text{máx}\{n \geq 1 : W_n \leq t\},$$

en donde convenimos que $\text{máx}\{\emptyset\} = 0$. Este proceso cuenta el número de eventos que han ocurrido hasta el instante $t \in [0, \infty)$.

Una definición alternativa pero equivalente del proceso anterior es la siguiente:

$$\forall t \in [0, \infty), \quad N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{W_n \leq t\}}.$$

En donde la función $\mathbb{1}_{\{W_n \leq t\}}$ representa la función indicadora del conjunto $\{W_n \leq t\}$, el cuál representa que el n -ésimo evento del fenómeno ha ocurrido antes del tiempo t . Notemos que dicha forma alternativa hace evidente que el proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ es no decreciente, pues la sucesión de variables W_n lo es y la función indicadora es mayor o igual a 0 con probabilidad 1.

Con las construcciones anteriores y partiendo únicamente de un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, podemos definir a un proceso de renovación como sigue:

Definición 2.1.1. *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables i.i.d., positivas con probabilidad 1 y con función de distribución común $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. consideremos, para cada $n \geq 0$, a las variables aleatorias W_n dadas por:*

$$W_0 \equiv 0 \quad \text{y} \quad W_n := \sum_{i=1}^n T_i, \quad n \geq 1.$$

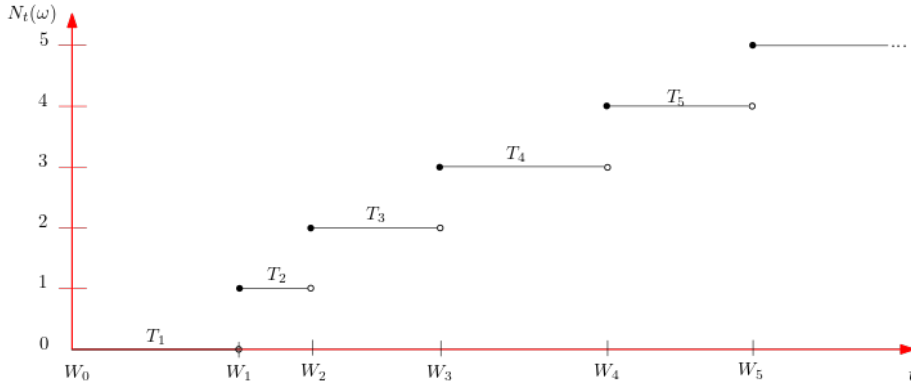


Figura 2.1: Trayectoria de un proceso de renovación N_t . Se pueden apreciar los otros dos procesos que lo definen. Si los tiempos de interarribo se distribuyen exponencial de parámetro λ , esta es la trayectoria de un proceso de Poisson de parámetro λ .

Denominamos proceso de renovación a la colección de variables $\{N_t : t \geq 0\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$,

$$N_t := \max\{n \geq 1 : W_n \leq t\}.$$

Al proceso de renovación $\{N_t : t \geq 0\}$ lo denotamos como $(N_t)_{t \geq 0}$.

Dada $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias *i.i.d* positivas con proba 1, es común denominar proceso de renovación a cualquiera de los procesos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(W_n)_{n \geq 0}$ o $(N_t)_{t \geq 0}$, en vista de que dado uno de ellos, se pueden recuperar los otros dos.

Ejemplo 2.1.2 (Reposición de focos). Supongamos que una habitación es iluminada por un foco y que cada vez que dicho foco se funde es reemplazado de forma inmediata por un foco idéntico al anterior. Sea T_i la variable aleatoria que representa el tiempo de vida del i -ésimo foco, y supongamos que el primer foco es colocado en el instante $t = 0$. Entonces $W_n = \sum_{i=1}^n T_i$ es el tiempo en el que el n -ésimo foco se funde y es reemplazado por otro.

Finalmente, si definimos $N_t = \max\{n \geq 1 : W_n \leq t\}$, entonces N_t es la cantidad de focos que han fallado y se han reemplazado hasta el instante $t \geq 0$.

Si las variables aleatorias T_i se asumen independientes e idénticamente distribuidas (lo cuál es razonable, pues los focos son idénticos y no se asumen cambios en las condiciones de la habitación conforme los focos se funden y se cambian) con una distribución cualquiera, entonces $(N_t)_{t \geq 0}$ conforma un proceso de renovación.

Ejemplo 2.1.3 (El proceso de Poisson). Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Entonces $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de renovación, en donde

los tiempos de interarribo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son variables independientes entre sí que se distribuyen exponencial de parámetro $\lambda > 0$, es decir, la distribución de T_1 es $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para cualquier $x \in [0, \infty)$.

Lo anterior, dependiendo del enfoque con el que se estudie a los procesos de Poisson, es parte de la definición misma del proceso, o se desprende de ésta.

Notemos que los procesos de renovación generalizan a los procesos de Poisson en el sentido de que se conservan la independencia y la idéntica distribución de los tiempos interarribo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ del proceso, sin embargo la función de distribución F de los tiempos interarribo en un proceso de renovación puede ser cualquiera, a diferencia de los procesos de Poisson.

Así, los procesos de renovación son otra posible generalización de los procesos de Poisson, alternativa a la generalización que hacen las cadenas de Márkov a tiempo continuo, pues si bien en estos últimos procesos los tiempos de interarribo T_i son independientes y exponenciales, se pierde la distribución idéntica pues como en el caso de una cadena de nacimiento y muerte, los parámetros de esas variables exponenciales no tienen por qué coincidir.

Más aún, los procesos de Poisson son los únicos procesos de renovación que tienen la propiedad de Márkov. Este hecho se desprende de la propiedad de pérdida de memoria propia de las variables $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, que caracterizan a la distribución exponencial, como se observa en el teorema 1.1.7.

En vista de lo anterior, dado que en el caso de un proceso de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ de parámetro $\lambda > 0$, las variables N_t tienen distribución *Poisson*(λt) para cada $t \geq 0$, una pregunta natural es: ¿qué podemos decir acerca de la distribución de las variables N_t para cada $t \geq 0$ cuando $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de renovación?

Para ello, recordemos primero que, para variables aleatorias independientes X y Y , con función de distribución F y G respectivamente, la función de distribución de la variable $X + Y$ es la convolución de las funciones de distribución. De forma precisa, si $Z = X + Y$, entonces su función de distribución está dada por:

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} dG(y)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x) = G * F(t).$$

De esta forma, si tenemos una distribución $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, definimos de forma recursiva la n -ésima convolución de F consigo misma como sigue:

Definición 2.1.4. Sea F una función de distribución. Definimos la n -ésima convolución de F consigo misma como

- $F^{*0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$
- $\forall n \geq 1, F^{*n}(t) = F * F^{*(n-1)}(t).$

Es sencillo observar que cuando $n = 1$ obtenemos nuestra función de distribución F , y además, por inducción, podemos demostrar la siguiente propiedad de convolución:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad F^{*(n+m)} = F^{*n} * F^{*m}.$$

Luego, si tenemos un proceso de renovación $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con función de distribución F , gracias a la independencia de las variables podemos demostrar usando nuevamente inducción que las variables $W_n = \sum_{i=1}^n T_i$ tienen una función de distribución que está dada por la n -ésima convolución de F consigo misma, es decir, por F^{*n} .

Con lo anterior, podemos encontrar una forma de expresar las distribuciones de las variables N_t de un proceso de renovación, cosa que establecemos en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.5. *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso de renovación y consideremos al proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ asociado a este. Entonces $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t).$$

Demostración. Recordemos que, de la definición de las variables W_n y N_t , obtenemos la igualdad de eventos: $\{N_t \geq n\} = \{W_n \leq t\}$. Notemos entonces que

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(N_t = n) + \mathbb{P}(N_t \geq n + 1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(W_n \leq t) - \mathbb{P}(W_{n+1} \leq t) \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t). \end{aligned}$$

■

Más aún, ahora podemos establecer el siguiente resultado que se espera al momento de modelar fenómenos reales.

Corolario 2.1.6. *Las variables aleatorias N_t son finitas con probabilidad 1 para cualquier $t \geq 0$, es decir, $\mathbb{P}(N_t < \infty) = 1$.*

Demostración. Notemos que, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t < \infty) &= \mathbb{P}(N_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) \\ &= F^{*0}(t) = 1. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1.7 (El proceso de Poisson). Dado que $\forall i \in \mathbb{N}, T_i \sim \exp(\lambda)$ para algún $\lambda > 0$, tenemos que

$$W_n = \sum_{i=1}^n T_i \sim \Gamma(n, \lambda),$$

de forma que la n -ésima convolución de la función de distribución exponencial consigo misma está dada por:

$$F^{*n}(t) = \int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx = e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

De esta forma concluimos que, para cualquier $t > 0$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

o lo que es lo mismo, para cualquier $t > 0$, $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

A pesar de haber encontrado una expresión para la función de distribución de las variables aleatorias N_t , las convoluciones resultan ser operaciones poco prácticas. Por ello, otra forma de obtener información acerca de las variables N_t es a través de su esperanza.

Definición 2.1.8. Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de renovación. Definimos su función de renovación como

$$m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Intuitivamente, y de acuerdo con la definición de esperanza, la función de renovación m nos indica el número de eventos esperado hasta el tiempo $t \geq 0$.

Podemos dar una expresión para la función de renovación en términos de las convoluciones de la función de distribución de los tiempos de interarribo.

Teorema 2.1.9. *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso de renovación con función de distribución F , y función de renovación m . Entonces, $\forall t \geq 0$,*

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Demostración. Sea $t \geq 0$. Recordemos que si X es una variable discreta positiva, podemos calcular su esperanza como: $\mathbb{E}(X) = \sum_k \mathbb{P}(X \geq k)$. Con ello, y recordando la igualdad entre eventos $\{W_n \geq t\} = \{N_t \leq n\}$ tenemos que

$$m(t) = \mathbb{E}(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(W_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

■

Es posible demostrar que la función $m(t)$ es finita. Dicho resultado será usado más adelante, y aunque no se incluye la prueba en este texto, esta se puede encontrar en [3, capítulo 10]. Otro aspecto importante de la función de renovación es que se puede obtener como una solución de una cierta ecuación diferencial conocida como Ecuación de Renovación.

Teorema 2.1.10. *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso de renovación con función de distribución F . Entonces,*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s) dF(s) = F(t) + (m * F)(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

Demostración. La técnica para demostrar este enunciado se conoce como análisis de primer paso o técnica de renovación. La idea es condicionar sobre el valor del primer tiempo de interarribo T_1 :

$$m(t) = \mathbb{E}(N_t) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}(N_t | T_1 = s) dF(s).$$

Donde en la última igualdad se usa esperanza condicional. Ahora, aquí existen dos casos. Notemos que

$$\int_0^t \mathbb{E}(N_t | T_1 = s) dF(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t, \\ 1 + m(t-s) & \text{si } s \leq t. \end{cases}$$

pues si hasta el instante t no han habido saltos, la esperanza del número de saltos al tiempo t es 0, mientras que si al tiempo t ya hubiese ocurrido algún salto, entonces el número de eventos esperados al tiempo t , dado que ya ocurrió el primer evento en un instante $s \leq t$, es el número de eventos esperados en el

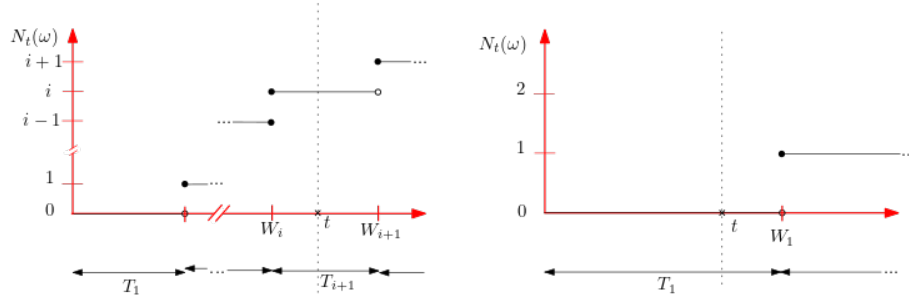


Figura 2.2: Los casos en la técnica de Renovación ejemplificada en trayectorias del proceso.

intervalo de tiempo (s, t) , de longitud $t - s$, sumado en uno (que es el evento que ya ocurrió). Así,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{E}(N_t | T_1 = s) dF(s) &= \int_0^t (1 + m(t-s)) dF(s) \\ &= \int_0^t dF(s) + \int_0^t m(t-s) dF(s) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-s) dF(s). \end{aligned}$$

■

Una forma más general de la ecuación de renovación (2.1) es la siguiente:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s) dF(s), \quad (2.2)$$

donde $t \geq 0$, h es una función acotada y F es una función de distribución. Esta ecuación tiene una única solución acotada, resultado que establecemos a continuación.

Teorema 2.1.11. Sean F y h dos funciones tales que F es una función de distribución y h es una función acotada. Entonces existe una única solución acotada g a la ecuación de renovación (2.2), y está dada por

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-s) dm(s),$$

donde $m(t)$ es la función de renovación del proceso con distribución F en cuestión.

Notemos que la ecuación de renovación (2.1) se recupera a partir de la ecuación (2.2) tomando $h = F$ y $g = m$.

La función de renovación resulta de especial importancia, puesto que es suficiente para caracterizar al proceso de renovación. Así, los procesos de renovación son un ejemplo en donde basta hallar las esperanzas de las variables involucradas para conocer el proceso del que estamos hablando. De hecho es posible demostrar que hay una correspondencia uno a uno entre las funciones de distribución F y las funciones de renovación $m(t)$.

La demostración de estos resultados no se incluye en el texto pero se encuentran disponibles en [3, sección 10.1].

2.2. Los teoremas de renovación

Una vez que estudiamos un poco la distribución de las variables aleatorias N_t en un proceso de renovación, nos preguntamos ahora por su comportamiento cuando el tiempo t tiende a infinito. A lo largo del capítulo asumiremos que para un proceso de renovación, $\mathbb{E}(T_1) < \infty$.

Analizar directamente el comportamiento del proceso para tiempos grandes N_t no nos da mucha información, pues de hecho es intuitivamente claro que, al ser las variables aleatorias $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ positivas con probabilidad 1 y con la misma distribución, la cantidad de eventos que ocurren va a irse acumulando a lo largo del tiempo, por lo que $N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ casi seguramente. Este será nuestro primer resultado en esta sección.

Teorema 2.2.1. *Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de renovación. Entonces con probabilidad 1,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty.$$

Demostración. Consideremos al evento de interés $A = \{\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty\}$. Tal evento lo podemos reescribir como:

$$A = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} \exists t \geq 0 \text{ tal que } N_t(\omega) \geq n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq 0} \{N_t \geq n\}.$$

Recordando la igualdad crucial $\{N_t \geq n\} = \{W_n \leq t\}$ deducimos que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq 0} \{W_n \leq t\}.$$

Sacando probabilidad tenemos:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq 0} \{W_n \leq t\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{W_n < \infty\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n < \infty),$$

donde en la penúltima desigualdad se utilizó la continuidad de la probabilidad, ya que, como $W_k \leq W_{k+1}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de eventos $\{W_n < \infty\}$ es decreciente.

Finalmente, como $\mathbb{E}(T_1) < \infty$, $\mathbb{E}(W_n) = n\mathbb{E}(T_1) < \infty$, por lo que W_n es finita con probabilidad 1, es decir, $\mathbb{P}(W_n < \infty) = 1$ y con esto el resultado se sigue. ■

Recordemos que $N_t = \max\{n \geq 1 : W_n \leq t\}$ nos indica el número de eventos que han ocurrido en el proceso hasta el instante t , así que en lugar de preguntarnos directamente por el comportamiento del proceso a tiempos grandes, tiene más sentido preguntarnos por la cantidad de eventos que ocurren por unidad de tiempo, para tiempos grandes. El teorema de renovación nos da una respuesta.

Teorema 2.2.2 (de renovación). *Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de renovación, y $\mu = \mathbb{E}(T_1)$ la esperanza de los tiempos de interarribo T_i del proceso, con $0 < \mu < \infty$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$$

con probabilidad 1.

Demostración. Recordemos que la sucesión $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y $W_n = \sum_{i=0}^n T_i$, así que por la ley fuerte de los grandes números,

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$$

con probabilidad 1.

Como $N_t = \max\{n \geq 1 : W_n \leq t\}$, concluimos que

$$W_{N_t} \leq t < W_{N_t+1}, \quad t > 0.$$

ya que si la cantidad de eventos que han ocurrido hasta el tiempo t es N_t , entonces t se encuentra después del instante en el que ocurre el evento N_t (instante denotado por W_{N_t}) pero antes del instante de llegada del evento N_t+1 (instante denotado por W_{N_t+1}). Así, al dividir la doble desigualdad entre N_t , obtenemos que

$$\frac{W_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{W_{N_t+1}}{N_t},$$

es decir,

$$\frac{W_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{W_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Ahora bien, asumiendo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{N_t}}{N_t} = \mu, \tag{2.3}$$

al tomar el límite, el término de la izquierda así como el primer factor de la derecha tienden a μ , y aplicando en el segundo factor de la derecha que $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ obtenemos

$$\mu \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_t} \leq \mu \cdot 1.$$

Tomando inversos multiplicativos concluimos. Solamente resta verificar que se cumple la igualdad (2.3).

Nosotros sabemos que, para cada $t \in [0, \infty)$, N_t es en realidad una función $N_t : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. Además sabemos que $N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, con probabilidad 1, lo cual quiere decir que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty\right\}\right) = 1.$$

Sea $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty\}$. Por otro lado, la ley fuerte de grandes números nos dice que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{W_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu\right\}\right) = 1.$$

Sea $\Omega_2 = \left\{\omega \in \Omega : \frac{W_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu\right\}$. Definamos $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Se tiene que Ω_3 es un evento de probabilidad 1. Sea ahora $\omega \in \Omega_3$, y sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un $M \in \mathbb{N}$ a partir del cual, si $t > M$, entonces $\left|\frac{W_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} - \mu\right| < \varepsilon$.

Como $\frac{W_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$, para tal $\varepsilon > 0$ existe un $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M_1$, $\left|\frac{W_n(\omega)}{n} - \mu\right| < \varepsilon$. Luego, para tal $M_1 > 0$, como $N_t(\omega) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, existe un $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $t > M_2$, $N_t(\omega) > M_1$. Definamos $M = M_2$ y sea $t > M$. Fijados t y ω , $N_t(\omega)$ ya es un número fijo en $\{0, 1, 2, \dots\}$, y como $t > M_2$, entonces $N_t(\omega) > M_1$. Por lo tanto, se cumple que

$$\left|\frac{W_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} - \mu\right| < \varepsilon.$$

Nótese finalmente que lo anterior es válido para cualquier $\omega \in \Omega_3$, donde Ω_3 es un conjunto de probabilidad 1. Luego, concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{N_t}}{N_t} = \mu$$

con probabilidad 1. ■

El teorema de renovación nos dice a grandes rasgos que para tiempos grandes, la cantidad de tiempo que tardan en ocurrir los eventos es precisamente la esperanza de los tiempos de interarribo. Presentamos ahora una aplicación del mismo.

Ejemplo 2.2.3. *Supongamos que en un videojuego en línea, un jugador es el anfitrión de una partida con una configuración de uno contra uno. Otros jugadores se interesan e intentan entrar a la partida desde el menú de todas las partidas en línea como un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Siempre que un contrincante entra a la partida del anfitrión, esta dura un tiempo aleatorio cuya función de distribución es F . No obstante, los jugadores no saben si una partida está ocupada o está libre hasta que intentan entrar en ella. Cuando un contrincante intenta entrar a la partida de un anfitrión, esta empieza inmediatamente si es que el anfitrión está esperando, o es rechazado inmediatamente y devuelto al menú con la lista de partidas si es que el anfitrión tiene una partida en marcha. En esta situación las siguientes preguntas son de interés:*

- *¿Cuál es la tasa a la cual los jugadores en efecto entran a la partida del anfitrión en cuestión?*
- *¿Cuál es la proporción de jugadores que en verdad entran a la partida respecto a la cantidad de jugadores totales que se interesan en dicha partida?*

Usaremos el teorema de renovación para responder dichas preguntas. Los tiempos de interarribo del proceso de Poisson que cuenta los jugadores que trataron de entrar a la partida al tiempo t están modelados por una sucesión de variables independientes que se distribuyen todas ellas exponencial de parámetro λ . Supongamos que los tiempos que duran las partidas están modelados por la sucesión de variables $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $\mathbb{E}(J_i) = \mu_F, \forall i \in \mathbb{N}$

Notemos que debemos tomar todas las variables aleatorias J_i en cuenta, pues es el tiempo efectivo que dura una partida, mientras que no podemos tomar en cuenta todos los tiempos de interarribo del Poisson ya que es posible que haya jugadores que quieran entrar a la partida del anfitrión cuando está ocupada. Sin embargo, en el instante en el que una partida de duración J_i termina estaremos a la mitad de un tiempo interarribo H_i del proceso Poisson, y gracias a la propiedad de pérdida de memoria, el tiempo que tarda en llegar un contrincante y comenzar la partida $i + 1$ desde el instante en el que terminó la partida i , vuelve a distribuir exponencial de parámetro λ .

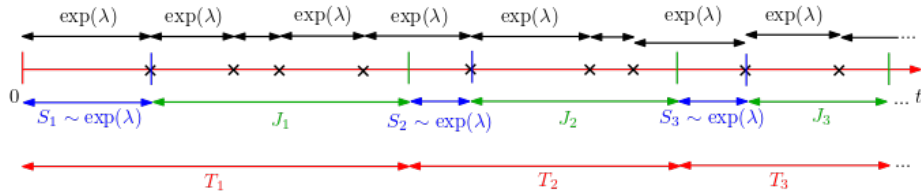


Figura 2.3: Diagrama de las variables aleatorias del proceso. Las cruces muestran los instantes en los que algún jugador intentó entrar a la partida.

De esta forma, para cada $i \in \mathbb{N}$, denominamos S_i a la variable que modela el tiempo restantes hasta que llegue un nuevo jugador de acuerdo al proceso

Poisson, luego de que la i -ésima partida acaba. Dichas variables se distribuyen $\exp(\lambda)$ y también son independientes. Consideramos así el proceso $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde,

$$T_i = S_i + J_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Este proceso resulta ser una sucesión de variables aleatorias *i.i.d.*, el cuál modela el ciclo completo desde que se espera un contrincante hasta que se termina la partida con él. Por lo tanto, el proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ asociado a la sucesión $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un proceso que cuenta el número de partidas que han ocurrido hasta el instante t . Luego, usando el teorema de renovación,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_i)} = \frac{1}{\mathbb{E}(S_i) + \mathbb{E}(J_i)} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_F} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_F}.$$

Esta expresión es la tasa a la cual los jugadores entran en efecto a la partida del anfitrión para tiempos grandes.

Finalmente, dado que los contrincantes potenciales para el anfitrión tratan de entrar de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, podemos concluir que la proporción está dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Jugadores que en efecto entran hasta } t}{\text{Jugadores que pretenden entrar hasta } t} = \frac{\frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_F}}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda\mu_F}.$$

Ahora estudiamos el comportamiento a largo plazo de la función de renovación $m(t)$. Utilizando el teorema de convergencia monótona en N_t y que $N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty.$$

Resulta de mayor interés estudiar el comportamiento a largo plazo del cociente entre el valor promedio de las variables N_t con respecto al tiempo.

Dado el teorema de renovación demostrado anteriormente, es razonable pensar que en efecto el límite de tal cociente existe y que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Y resulta ser que dicha afirmación es verdadera, aunque no es una consecuencia directa del teorema de renovación.

Es conocido que la convergencia casi en todas partes no implica la convergencia en norma L^1 , es decir, dada una sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = C$, donde $C \in \mathbb{R}$, no implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = C$. Puede ser incluso que tal último límite sea infinito, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.4. En el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$ (el intervalo con la σ -álgebra de Borel y la medida de Lebesgue), sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión de variables aleatorias tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n^k & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < \omega \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que en este espacio de probabilidad, la sucesión converge casi en todas partes a la variable idénticamente 0, es decir, $X \equiv 0$. Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^1 X_n dx = n^k \cdot \frac{1}{n} = n^{k-1},$$

y así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ \infty & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Por otro lado, $\mathbb{E}(X) = E(0) = 0$, así que sin importar el valor de $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \neq \mathbb{E}(X).$$

Con esto, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ con probabilidad 1 no implica que $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X)$.

Sin embargo, como ya se mencionó, el siguiente resultado nos dice que en un proceso de renovación también podemos hablar de un límite en norma L^1 cuando $t \rightarrow \infty$ para los cocientes N_t/t .

Para demostrar tal resultado, haremos uso de un tiempo de paro, noción que establecemos a continuación.

Definición 2.2.5. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ una variable aleatoria de dicho espacio. Decimos que N es un tiempo de paro si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{N = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

donde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ es la σ -álgebra generada por el conjunto de variables aleatorias $\{X_1, \dots, X_n\}$.

En palabras, lo anterior nos dice que una variable aleatoria de Ω en \mathbb{N} es un tiempo de paro si los eventos $\{N = n\}$ son cognoscibles a partir de la información otorgada por las primeras n variables aleatorias X_1, \dots, X_n del fenómeno que se está estudiando.

Un ejemplo de un tiempo de paro, útil para demostrar el resultado que buscamos, es el siguiente:

Observación 2.2.6. *Dados un proceso de renovación $(N_t)_{t \geq 0}$ con tiempos de interarribo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y un tiempo $t > 0$, la variable aleatoria*

$$M_t = \text{mín}\{n \geq 1 : W_n > t\}$$

es un tiempo de paro con respecto a la sucesión $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, donde $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Observemos primero que $\forall t \geq 0$, $M_t = N_t + 1$, ya que se da la siguiente igualdad entre eventos:

$$\{N_t = n - 1\} = \{M_t = n\}.$$

Con esto, para cualquier $n \geq 1$ se da también la igualdad de eventos $\{M_t \geq n\} = \{N_t \geq n - 1\}$. Recordamos nuevamente la igualdad $\{N_t \geq n - 1\} = \{W_{n-1} \leq t\}$, y concluimos que:

$$\{M_t \geq n\} = \{W_{n-1} \leq t\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} T_i \leq t \right\}.$$

Pero este último evento en efecto pertenece a $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$. Es decir, los eventos $\{M_t \geq n\}$ son cognoscibles partiendo únicamente de la información otorgada por \mathcal{F}_n . Finalmente, usando las propiedades de las σ -álgebras, se desprende que para cualquier $n \geq 1$, $\{M_t = n\} \in \mathcal{F}_n$. ■

Finalmente, enunciemos y demostramos una identidad importante como última herramienta previa al resultado que queremos, y que nos será de utilidad más adelante:

Teorema 2.2.7 (Identidad de Wald). *Sean $(X_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios i.i.d y $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ un tiempo de paro con respecto a la sucesión $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de σ -álgebras generadas por los vectores de la sucesión $(X_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel-medible. Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|f(X_i, r_i)| \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}) < \infty$ y $\mathbb{E}(N) < \infty$. Entonces*

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N f(X_i, r_i) \right) = \mathbb{E}(f(X_1, r_1)) \mathbb{E}(N).$$

En particular, si sustituimos $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|f(X_i, r_i)| \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}) < \infty$ por $\mathbb{E}(|f(X_1, r_1)|) < \infty$, la identidad sigue siendo válida.

Demostración. Reescribimos primero la suma aleatoria de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^N f(X_i, r_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(X_i, r_i) \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}.$$

La igualdad anterior se sigue de que la función indicadora se anula cuando $i \geq N + 1$. Sacando esperanza y usando el teorema de convergencia dominada con variable aleatoria dominante $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(X_i, r_i)| \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}$ (la cual es integrable usando convergencia monótona y nuestras hipótesis), tenemos que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N f(X_i, r_i) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f(X_i, r_i) \mathbf{1}_{\{N \geq i\}} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(f(X_i, r_i) \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}).$$

Ahora recordamos que N es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de forma que el evento $\{\omega \in \Omega : N(\omega) \geq i\} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : N(\omega) \leq i-1\}$ pertenece a \mathcal{F}_{i-1} que es la σ -álgebra generada por $(X_1, r_1), (X_2, r_2), \dots, (X_{i-1}, r_{i-1})$, así que tal evento es independiente de los eventos generados por la variable $f(X_i, r_i)$ pues la sucesión es de vectores independientes, y al ser f una función Borel-medible, la independencia se preserva. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(f(X_i, r_i) \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(f(X_i, r_i)) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{N \geq i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(f(X_i, r_i)) \mathbb{P}(N \geq i). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Finalmente, dado que N es una variable aleatoria discreta y positiva,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(f(X_i, r_i)) \mathbb{P}(N \geq i) = \mathbb{E}(f(X_1, r_1)) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i) = \mathbb{E}(f(X_1, r_1)) \mathbb{E}(N).$$

En el caso en el que $\mathbb{E}(|f(X_1, r_1)|) < \infty$ notemos que, como $(X_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores independientes y la función valor absoluto es Borel-medible, la sucesión $(|f(X_i, r_i)|)_{i \in \mathbb{N}}$ es de variables independientes y $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(X_n, r_n)|$ es \mathcal{F}_n -medible, de forma que el argumento de las igualdades en (2.4) aplicado a esta nueva sucesión es válido, y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|f(X_i, r_i)| \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|f(X_i, r_i)|) \mathbb{P}(N \geq i) = \mathbb{E}(|f(X_1, r_1)|) \mathbb{E}(N) < \infty,$$

con lo que recuperamos la hipótesis sustituida y obtenemos el resultado. \blacksquare

Observemos que, si en el resultado anterior usamos $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$ la proyección en la primera coordenada, la cuál es una función continua, recuperamos la versión unidimensional de la identidad de Wald. Con esto estamos listos para probar el resultado que nos interesa.

Teorema 2.2.8 (Elemental de renovación). *Sea $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de renovación y $\mu = \mathbb{E}(T_1)$ la esperanza de sus tiempos de interarribo T_i , en donde $0 < \mu < \infty$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Demostración. La idea de la prueba consiste en encontrar primero un tiempo de paro respecto a $\mathcal{F}_n := \sigma(T_1, \dots, T_n)$ que sea adecuado para aplicar la identidad de Wald usando la sucesión de vectores (T_i, C) , donde C es una variable aleatoria constante, y la proyección a la primera coordenada, a $N_t + 1$. Consideremos para esto al proceso $(M_t)_{t \geq 0}$, definido en la observación 2.2.6, el cual sabemos que se compone de tiempos de paro.

Sea $t > 0$ un tiempo fijo. Dado que $m(t)$ es finita, $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(N_t + 1) = m(t) + 1 < \infty$. Además, las variables aleatorias T_i son positivas con probabilidad 1 de forma que $\mathbb{E}(|T_1|) = \mathbb{E}(T_1) < \infty$. Luego, usando la identidad de Wald:

$$\mathbb{E}(W_{M_t}) = \mathbb{E}(W_{N_t+1}) = \mathbb{E}(T_1)\mathbb{E}(N_t + 1) = \mu(\mathbb{E}(N_t) + 1) = (m(t) + 1)\mu.$$

Por otro lado, ubicados en ese instante $t > 0$ tenemos que

$$t < W_{N_t+1},$$

ya que si al instante t han ocurrido N_t renovaciones, entonces la renovación $N_t + 1$ ocurrirá después de t . Así, usando monotonía de la esperanza y juntando los resultados anteriores,

$$t < \mathbb{E}(W_{N_t+1}) = (m(t) + 1)\mu,$$

de donde

$$\frac{1}{\mu} < \frac{m(t) + 1}{t}, \quad (2.5)$$

A continuación, definimos algunas variables aleatorias y construimos un proceso de renovación auxiliar: sea $M \in \mathbb{N}$. Definimos $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$S_i = \min\{T_i, M\}, \quad V_n = \sum_{i=1}^n S_i \quad \text{y} \quad K_t = \max\{n \geq 1 : V_n \leq t\}.$$

Notemos que al ser $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida, el proceso $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ también lo será, pues esencialmente es el mismo proceso salvo que se está acotando el tiempo que puede tomar algún tiempo interarribo. Esto permite controlar mejor el comportamiento del proceso cuando el tiempo tiende a infinito.

De la definición de las variables, $S_i \leq T_i$, así que

$$V_n = \sum_{i=1}^n S_i \leq \sum_{i=1}^n T_i = W_n.$$

Por lo tanto, para un tiempo $t > 0$ arbitrario,

$$K_t = \max\{n \leq 1 : V_n \leq t\} \geq \max\{n \leq 1 : W_n \leq t\} = N_t,$$

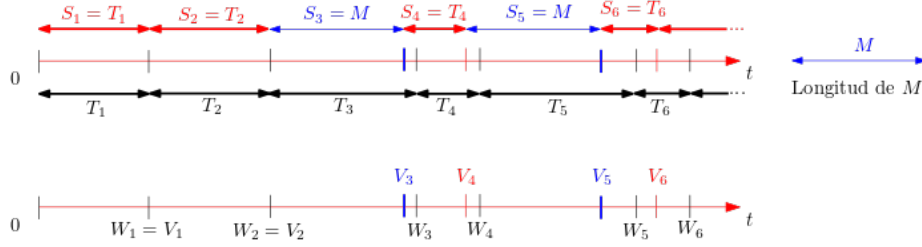


Figura 2.4: Ilustración de los procesos $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que conforman un proceso de renovación auxiliar.

pues al ser más pequeños los tiempos entre cada evento, las renovaciones en el proceso K_t ocurren más rápido que en el proceso original N_t .

Con la desigualdad $N_t \leq K_t$, la identidad de Wald aplicada a V_{K_t+1} y propiedades de la esperanza obtenemos

$$\mathbb{E}(N_t + 1) \leq \mathbb{E}(K_t + 1) = \frac{\mathbb{E}(V_{K_t+1})}{\mathbb{E}(S_i)}.$$

Por otro lado, por construcción $V_{K_t+1} - V_{K_t} = S_{K_t+1}$ y dado que $V_{K_t} < t$ (el número de renovaciones del proceso auxiliar hasta t es K_t), tenemos $-t < -V_{K_t}$ y en consecuencia:

$$V_{K_t+1} = (V_{K_t+1} - t) + t \leq S_{K_t+1} + t \leq M + t.$$

Así que retomando las desigualdades anteriores,

$$\mathbb{E}(N_t + 1) \leq \frac{\mathbb{E}(V_{K_t+1})}{\mathbb{E}(S_1)} \leq \frac{\mathbb{E}(M + t)}{\mathbb{E}(S_1)} = \frac{M + t}{\mathbb{E}(S_1)}.$$

Dividiendo entre $t > 0$ y tomando límites,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_t + 1)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M + t}{t} \cdot \frac{1}{\mathbb{E}(S_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}(\min\{M, T_1\})}.$$

Juntando la expresión anterior con la desigualdad (2.5) tenemos:

$$\frac{1}{\mu} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N_t + 1)}{t} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(\min\{M, T_1\})}.$$

El razonamiento anterior fue hecho para una $M \in \mathbb{N}$ arbitraria. Finalmente, considerando la sucesión $(\min\{M, T_1\})_{M \in \mathbb{N}}$ la cual está formada por variables positivas con probabilidad 1, integrables y tales que $\min\{M, T_1\} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} T_1$, por el teorema de convergencia dominada,

$$\frac{1}{\mu} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t) + 1}{t} \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}(\min\{M, T_1\})} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)},$$

de donde

$$\frac{1}{\mu} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

y obtenemos la igualdad buscada. ■

Así como en el primer teorema de renovación, el resultado anterior nos indica que para tiempos muy grandes, el promedio del número de renovaciones que ocurren por unidad de tiempo es igual al inverso de la cantidad de tiempo promedio que tarda en ocurrir una renovación.

Los teoremas anteriores no son los únicos resultados en cuanto al comportamiento de un proceso de renovación a largo plazo. Estos resultados son más complicados de establecer y a continuación enunciamos algunos de ellos brevemente.

Teorema 2.2.9 (Renovación de Blackwell). *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso de renovación con distribución $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ y tal que $\mathbb{E}(T_1) = \mu$.*

1. *Si F es no aritmética (es decir, $\text{Supp}(F) \neq d\mathbb{Z}$ para alguna $d > 0$). Entonces $\forall h > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t+h) - m(t) = \frac{h}{\mu}.$$

2. *Si F es aritmética con base $d > 0$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t+nd) - m(t) = \frac{nd}{\mu}.$$

Esencialmente este teorema nos indica el comportamiento del promedio de renovaciones en un intervalo de tamaño $h > 0$ arbitrario. Por último, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.10 (Clave de renovación). *Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso de renovación con distribución $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Sea $g(t)$ la solución a la ecuación de renovación:*

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s)dF(s),$$

en donde suponemos que $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es directamente Riemann integrable.

1. *Si F es no aritmética, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(t)dt.$$

2. *Si F es aritmética con base $d > 0$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t+nd) = \frac{d}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} h(t+kd).$$

Se puede demostrar que estos últimos dos teoremas son equivalentes y que ambos implican al teorema elemental de renovación (ver [6, capítulo 6]).

Hasta ahora los teoremas presentados son en cierta medida resultados que generalizan la ley de los grandes números para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, pero en procesos de renovación, así que siguiendo esta línea de pensamiento, presentamos a continuación una generalización del teorema central del límite para procesos de renovación.

Teorema 2.2.11 (Central del límite para procesos de renovación). Sean $(N_t)_{t \geq 0}$ un proceso de renovación, $\mu = \mathbb{E}(T_1)$ la esperanza de los tiempos de interarribo T_i del proceso, en donde $0 < \mu < \infty$, y sea $\sigma = \text{Var}(X_1)$ tal que $0 < \sigma^2 < \infty$. Entonces

$$\frac{N_t - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} Z$$

donde el límite se entiende en el sentido de distribución, con Z una variable aleatoria con distribución Normal(0, 1).

La prueba rigurosa del resultado se omite, sin embargo se presenta la idea de la validez del resultado. Queremos probar que

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \leq x\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(Z \leq x).$$

Para ello es mejor analizar la probabilidad $\mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \geq x\right)$. Despejando N_t y recordando que $\{N_t \geq k\} = \{W_k \leq t\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \geq x\right) &= \mathbb{P}\left(N_t \geq \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(N_t \geq \left\lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \right\rfloor\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W_{\left\lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \right\rfloor} \leq t\right), \end{aligned}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa el mayor entero menor o igual a $x \in \mathbb{R}$. Denotamos $\alpha(t) = \left\lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \right\rfloor$ y llevamos la expresión anterior a la forma usual del teorema central del límite:

$$\mathbb{P}(W_{\alpha(t)} \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{W_{\alpha(t)} - \alpha(t)\mu}{\sigma\sqrt{\alpha(t)}} \leq \frac{t - \alpha(t)\mu}{\sigma\sqrt{\alpha(t)}}\right).$$

Por un lado nótese que $\alpha(t) = \left\lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \right\rfloor \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$. Por otro lado,

$$\alpha(t) = \left\lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \right\rfloor \sim \frac{t}{\mu} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

de forma que

$$t - \mu\alpha(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -x\mu\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}$$

y en consecuencia

$$\frac{t - \alpha(t)\mu}{\sigma\sqrt{\alpha(t)}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -x.$$

Con esto, por el teorema central del límite,

$$\mathbb{P}\left(\frac{W_{\alpha(t)} - \alpha(t)\mu}{\sigma\sqrt{\alpha(t)}} \leq \frac{t - \alpha(t)\mu}{\sigma\sqrt{\alpha(t)}}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(Z \leq -x)$$

donde $Z \sim Normal(0, 1)$. Usando que la función de densidad de una normal es par se concluye.

Ejemplo 2.2.12. *En una fábrica, la producción de un determinado artículo está a cargo de dos secciones que tienen distintos procesos de producción. La primera sección logra producir un artículo de acuerdo a una variable aleatoria $\Gamma(4, 2)$, mientras que la segunda sección logra producir el artículo de acuerdo a una variable aleatoria $Uniforme(0, 4)$. Aproximar la probabilidad de que entre las dos secciones se produzcan al menos 90 artículos en un tiempo $t = 100$.*

Primero, asumamos que $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son los tiempos aleatorios en los que tarda en producirse el i -ésimo artículo en la primera y en la segunda sección respectivamente, donde asumimos que son sucesiones de variables todas ellas independientes entre sí. De acuerdo al problema planteado, tenemos que para cualquier $i \in \mathbb{N}$,

$$T_i \sim \Gamma(4, 2) \quad y \quad S_i \sim Uniforme([0, 4]).$$

Luego, $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son procesos de renovación, así que denotemos por N_t y M_t a los procesos que cuentan el número de artículos producidos hasta el tiempo t por la primera y la segunda sección respectivamente.

Con lo anterior podemos replantear el problema, el cuál se reduce a encontrar la probabilidad de que $N_{100} + M_{100} \geq 90$. Para esto hacemos uso del teorema central del límite para procesos de renovación: la media y la varianza de la variable N_{100} son $\mu_N = 2$ y $\sigma_N^2 = 1$, así que aproximadamente

$$\frac{N_{100} - 100/2}{\sqrt{100 \cdot 1/2^3}} \sim Normal(0, 1),$$

mientras que para la variable M_{100} , la media y la varianza son $\mu_M = 2$ y $\sigma_M^2 = \frac{4}{3}$, por lo que aproximadamente

$$\frac{M_{100} - 100/2}{\sqrt{100 \cdot \frac{4}{3}/2^3}} \sim Normal(0, 1).$$

Realizando los cálculos y transformando las variables aleatorias normales, tenemos que $N_{100} \sim \text{Normal}(50, \frac{25}{2})$ mientras que $M_{100} \sim \text{Normal}(50, \frac{50}{3})$. Luego, la suma de ambas variables se distribuye aproximadamente

$$N_{100} + M_{100} \sim \text{Normal}\left(100, \frac{175}{6}\right),$$

de forma que $\mathbb{P}(N_{100} + M_{100} \geq 90) \approx \mathbb{P}(Z \geq 90)$ donde $Z \sim \text{Normal}(100, \frac{175}{6})$. Este último valor es posible aproximarlo transformando la variable Z a una normal estándar, el cuál es de 0.968. De esta forma, aproximadamente con probabilidad de 96.8 %, luego de un tiempo $t = 100$, las dos secciones habrán producido al menos 90 artículos.

2.3. Procesos de renovación con premio

Usando como base los procesos de renovación estudiados anteriormente, podemos construir un tipo de procesos que resultan ser bastante adecuados para las aplicaciones.

Supongamos que, dado un proceso de renovación $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, al momento W_i donde ocurre la i -ésima renovación obtenemos un premio de tamaño aleatorio que denotaremos por r_i . Dichos premios r_i los podemos suponer independientes entre sí e idénticamente distribuidos, pero no necesariamente independientes de la longitud del i -ésimo evento, es decir, el premio podría depender del tamaño del tiempo de interarribo T_i (lo cuál es razonable e incluso esperable si queremos modelar fenómenos de la realidad).

Si denotamos por R_t a la cantidad total de premios acumulados hasta el tiempo $t \geq 0$, nos encontramos ante un nuevo proceso estocástico, del que podemos preguntarnos por su comportamiento, y que puede modelar una gran cantidad de situaciones, pues las variables r_i pueden modelar costos, pagos, puntajes, entre muchas otras posibilidades. Esta es la idea de los procesos de renovación con premio, que definimos a continuación.

Definición 2.3.1. Sea $(T_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios i.i.d definidos en el mismo espacio de probabilidad, donde $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un proceso de renovación. Supongamos que $(N_t)_{t \geq 0}$ es el proceso que cuenta las renovaciones hasta el instante $t \geq 0$. Definimos al proceso de renovación con premio $(R_t)_{t \geq 0}$ como sigue:

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} r_i, \quad t \geq 0.$$

Un primer ejemplo de los procesos de renovación con premio son los procesos de Poisson compuestos.

Ejemplo 2.3.2 (El proceso de Poisson compuesto). Los procesos de renovación con premio generalizan a estos procesos: si tenemos un proceso de Poisson compuesto $(X_t)_{t \geq 0}$ tal que $\forall t \geq 0$,

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} r_i$$

donde $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson, $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son sus tiempos de interarribo con distribución exponencial, y $(r_i)_{i \geq 0}$ son los incrementos asociados al i -ésimo tiempo de interarribo, los cuales se asumen independientes del proceso $(N_t)_{t \geq 0}$, entonces $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de renovación con premio.

En el ejemplo anterior, es de interés resaltar que los procesos de Poisson son un caso muy particular de los procesos de renovación con premio, ya que estos últimos no asumen la independencia entre los procesos $(N_t)_{t \geq 0}$ y $(r_i)_{i \geq 0}$.

Es de particular interés preguntarnos por el comportamiento de este proceso con respecto al tiempo $t \geq 0$ cuando esta cantidad tiende a infinito. Esto nos lleva a un par de resultados análogos a los dos teoremas de renovación vistos en la sección pasada y que son muy útiles para las aplicaciones.

Teorema 2.3.3 (de renovación con premio). Sea $(T_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios i.i.d y sea $(R_t)_{t \geq 0}$ el proceso de renovación con premio asociado. Supongamos que $\mathbb{E}(T_1) = \mu$ y $\mathbb{E}(|r_1|) = \gamma$, donde $0 < \mu < \infty$ y $\gamma < \infty$. Entonces

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(r_1)}{\mathbb{E}(T_1)}$ con probabilidad 1.

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(R_t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(r_1)}{\mathbb{E}(T_1)}$.

Demostración. 1. Sea $t \geq 0$, notemos que

$$\frac{R_t}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} r_i}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t}.$$

Por un lado, al ser $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables i.i.d, usando que $N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ y la ley fuerte de los grandes números, y argumentando de forma similar a como se hizo en la igualdad 2.3, con probabilidad 1 sucede que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t} r_i}{N_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \gamma.$$

Por otro lado usando el teorema de renovación, con probabilidad 1:

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}.$$

Multiplicando ambas expresiones, obtenemos el inciso 1.

2. Recordemos de la observación 2.2,6 que el proceso $M_t = N_t + 1$ es un tiempo de paro con respecto a la sucesión de σ -álgebras $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, donde para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$.

Si ahora consideramos a la sucesión de parejas $(T_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$, entonces las variables $(M_t)_{t \geq 0}$ son tiempos de paro con respecto a la sucesión de σ -álgebras $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}_n = \sigma((T_1, r_1), \dots, (T_n, r_n))$. Intuitivamente lo anterior es válido pues si para cualquier $n \geq 1$, los eventos $\{M_t = n\}$ son cognoscibles únicamente sabiendo la información de $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$, entonces al ‘agregar más información’ que pueda ser cognoscible al tiempo n con las parejas (T_i, r_i) , el evento $\{M_t = n\}$ sigue siendo cognoscible.

Con esto, dado que las parejas (T_i, r_i) son i.i.d. y $\mathbb{E}(|r_1|) < \infty$, utilizando ahora la función $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_2(T_i, r_i) = r_i$ (la proyección en la segunda coordenada, la cual es una función medible) en la identidad de Wald 2.2.7, obtenemos una versión adecuada de dicho resultado que aplicamos a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_t) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t} r_i \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t+1} r_i - r_{N_t+1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t+1} r_i \right) - \mathbb{E}(r_{N_t+1}) = \mathbb{E}(r_1)\mathbb{E}(N_t + 1) - \mathbb{E}(r_{N_t+1}) \\ &= \mathbb{E}(r_1)(m(t) + 1) - \mathbb{E}(r_{N_t+1}). \end{aligned}$$

Gracias al teorema elemental de renovación 2.2.8,

$$\frac{\mathbb{E}(r_1)(m(t) + 1)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\mathbb{E}(r_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{\gamma}{\mu},$$

por lo que resta demostrar que $\frac{\mathbb{E}(r_{N_t+1})}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ para concluir.

Para esto usamos de nuevo la técnica de renovación expuesta en 2.1.10. Denotemos por $r(t)$ a la expresión $\mathbb{E}(r_{N_t+1})$. De forma análoga a lo hecho en el resultado mencionado antes, al condicionar sobre el valor de T_1 tenemos:

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^\infty \mathbb{E}(r_{N_t+1} | T_1 = x) dF(x) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(r_{N_t+1} | T_1 = x) dF(x) + \int_t^\infty \mathbb{E}(r_{N_t+1} | T_1 = x) dF(x). \end{aligned}$$

Por un lado, fijado el tiempo $t > 0$, si la primera renovación ocurre en un instante $T_1 = x \leq t$ entonces el premio número $N_t + 1$ es distinto del primer premio r_1 , por lo que es independiente de T_1 y su esperanza coincide con la esperanza del premio número $N_{t-x} + 1$. Lo anterior gracias a que las parejas (T_i, r_i) son i.i.d. Por otro lado, si la primera renovación ocurre en un instante $T_1 = x > t$, entonces el valor promedio del premio número $N_t + 1$ es el valor promedio del primer premio r_1 . Así,

$$\begin{aligned}
r(t) &= \int_0^t \mathbb{E}(r_{N_t+1} | T_1 = x) dF(x) + \int_t^\infty \mathbb{E}(r_{N_t+1} | T_1 = x) dF(x) \\
&= \int_0^t \mathbb{E}(r_{N_t+1}) dF(x) + \int_t^\infty \mathbb{E}(r_1 | T_1 = x) dF(x) \\
&= \int_0^t \mathbb{E}(r_{N_{t-x}+1}) dF(x) + \int_t^\infty \mathbb{E}(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} | T_1 = x) dF(x) \\
&= \int_0^t r(t-x) dF(x) + \int_0^\infty \mathbb{E}(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} | T_1 = x) dF(x) \\
&= \int_0^t r(t-x) dF(x) + \mathbb{E}(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $r(t) = \mathbb{E}(r_{N_t+1})$ satisface la ecuación de renovación:

$$r(t) = H(t) + \int_0^t r(t-x) dF(x), \quad (2.6)$$

donde F es la función de distribución de T_1 y $H(t) = \mathbb{E}(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}})$.

Notamos que la sucesión de variables aleatorias $(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > n\}})_{n \geq 1}$ tiende a 0 conforme n tiende a infinito pues la función indicadora se anula en algún punto ya que $T_1 < \infty$ con probabilidad 1. Así, usando que $|\mathbb{E}(r_1 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}})| \leq \mathbb{E}(|r_1|) = \gamma < \infty$ y el teorema de convergencia dominada podemos deducir que:

- a) $|H(t)| < \mathbb{E}(|r_1|) < \infty$ para cualquier $t \geq 0$ (la función H es acotada).
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$.

Como H es acotada, de acuerdo a lo expuesto en 2.1.11 la ecuación de renovación (2.6) tiene por solución:

$$r(t) = H(t) + \int_0^t H(t-x) dm(x),$$

donde $m(t) = \mathbb{E}(N_t)$. Finalmente, dado que $H(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, fijando una $\varepsilon > 0$ existe una $M_\varepsilon < \infty$ tal que para cualquier $t \geq M_\varepsilon$, $|H(t)| \leq \varepsilon$. Con

esto, acotamos la expresión que nos interesa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{r(t)}{t} \right| &= \frac{|H(t) + \int_0^{t-M_\varepsilon} H(t-x) dm(x) + \int_{t-M_\varepsilon}^t H(t-x) dm(x)|}{t} \\ &\leq \frac{|H(t)| + \int_0^{t-M_\varepsilon} |H(t-x)| dm(x) + \int_{t-M_\varepsilon}^t |H(t-x)| dm(x)}{t}. \end{aligned}$$

Ahora, si $0 < x < t - M_\varepsilon$ entonces $M_\varepsilon < t - x$ y entonces ε acota a H . De lo contrario H aún está acotada por $\mathbb{E}(|r_1|)$, así que:

$$\begin{aligned} &\frac{|H(t)| + \int_0^{t-M_\varepsilon} |H(t-x)| dm(x) + \int_{t-M_\varepsilon}^t |H(t-x)| dm(x)}{t} \\ &\leq \frac{\varepsilon + \int_0^{t-M_\varepsilon} \varepsilon dm(x) + \int_{t-M_\varepsilon}^t \mathbb{E}(|r_1|) dm(x)}{t} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon m(t-M_\varepsilon)}{t} + \frac{\mathbb{E}(|r_1|)(m(t) - m(t-M_\varepsilon))}{t} \\ &= \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon m(t-M_\varepsilon)}{t-M_\varepsilon} \cdot \frac{t-M_\varepsilon}{t} + \frac{\mathbb{E}(|r_1|)}{t} (m(t) - m(t-M_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Usando el teorema de renovación 2.2.8 en el sumando de enmedio, y el teorema de renovación 2.2.9 con $h = -M_\varepsilon$ en el sumando derecho,

$$\frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon m(t-M_\varepsilon)}{t-M_\varepsilon} \cdot \frac{t-M_\varepsilon}{t} + \frac{\mathbb{E}(|r_1|)}{t} (m(t) - m(t-M_\varepsilon)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\mathbb{E}(T_1)}.$$

Dada la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, tenemos que:

$$-\frac{\mathbb{E}(r_{N_t+1})}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

y concluimos. ■

Ejemplo 2.3.4. *Del ejemplo 2.2.3, recordemos que $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias con distribución F que modelan el tiempo de duración del i -ésimo juego, mientras que las variables $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son parte de algunos de los tiempos de interarribo del proceso de Poisson que modela los jugadores que pretenden entrar en la partida del anfitrión, de forma que $\forall i \in \mathbb{N}$, $T_i = J_i + S_i$. Supongamos ahora que por cada partida jugada, el anfitrión gana experiencia, de forma que en la i -ésima partida gana una cantidad r_i de esta. Es natural pensar que r_i y J_i no son independientes, pues a menudo entre más tiempo dura una partida, mayor experiencia se gana. La pregunta entonces es:*

- A tiempos grandes, ¿cuanta experiencia gana el anfitrión de la partida?

Y para responder a esto podemos considerar ahora la sucesión $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias, independientes entre ellas y con media $\mathbb{E}(r_1) = \gamma$, y con las parejas $(T_i, r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ construir al proceso de renovación con premio siguiente: $\forall t \geq 0$,

$$R_t = \sum_{i=0}^{N_t} r_i$$

donde N_t es el proceso de renovación construido en 2.2.3. El proceso R_t determina la cantidad total de experiencia acumulada por el jugador hasta el tiempo $t \geq 0$ desde que la partida comenzó. Usando el teorema de renovación con premio, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\gamma}{\mu} \text{ casi seguramente,}$$

de forma que para tiempos grandes, el jugador recibe una cantidad que, en palabras, es la proporción de la experiencia promedio que se gana en cada partida terminada, respecto del tiempo promedio de duración de cada partida (incluyendo el tiempo que el jugador espera a que un oponente ingrese a su partida).

Capítulo 3

Una aplicación a un problema de fisiología celular

Para concluir con esta presentación de algunos procesos estocásticos, presentaremos una aplicación de los procesos de renovación, la cual consiste en modelar el comportamiento de las células del colon humano durante su proceso de reproducción y diferenciación, el cuál es descrito en [9]. Para ello daremos primero una breve descripción del órgano, pasando posteriormente a presentar el modelo y finalmente mostrando que las predicciones hechas por el modelo con algunas cantidades estimadas coinciden con los resultados experimentales.

3.1. El colon humano

Para comenzar con esta sección, se presenta un resumen acerca del colon, su funcionamiento y parte de su histología. El contenido de esta sección es extraído de [7].

El sistema digestivo humano comprende tanto al tubo digestivo, el cuál está conformado por la cavidad bucal, el esófago, el estómago y los intestinos delgado y grueso, como a las estructuras asociadas a este, que serían la lengua, los dientes, el páncreas, la vesícula biliar o el hígado. Las principales funciones de este sistema son el transporte de agua y alimentos a través del tubo digestivo, la digestión y secreción de sustancias para que esta se lleve a cabo, así como la absorción de agua, de los alimentos digeridos y la excreción de los residuos sin digerir o no digeribles.

Como tal, el interior del tubo digestivo no forma parte del cuerpo, a pesar de adentrarse en él. Así, se le denomina ‘luz del tubo digestivo’ o ‘lumen’ a la

parte que físicamente corresponde al exterior del cuerpo. De esta manera, tanto la cavidad bucal como el interior del estómago o de los intestinos forman parte de la luz del tubo digestivo.

La porción del tubo digestivo que se extiende desde el comienzo del esófago hasta la parte externa del conducto anal, es un tubo hueco, de diámetro variable, pero que presenta esencialmente la misma estructura en su pared celular, la cual está compuesta por cuatro capas de tejido, que desde el interior del tubo digestivo (es decir, desde la luz del tubo digestivo) hacia el exterior de este, son: la mucosa, la submucosa, la muscular externa y la serosa.

Nuestro interés se centra en la primer capa, que es la mucosa, ya que es la parte que actúa como barrera entre la luz del tubo digestivo (que es donde transitan los alimentos y el agua, y donde se produce el proceso digestivo) y el interior del cuerpo. El tejido especializado de la mucosa realiza tres funciones principales: protección, absorción y secreción, las cuales serán más relevantes o menos relevantes, dependiendo de la zona del tubo digestivo donde observemos.

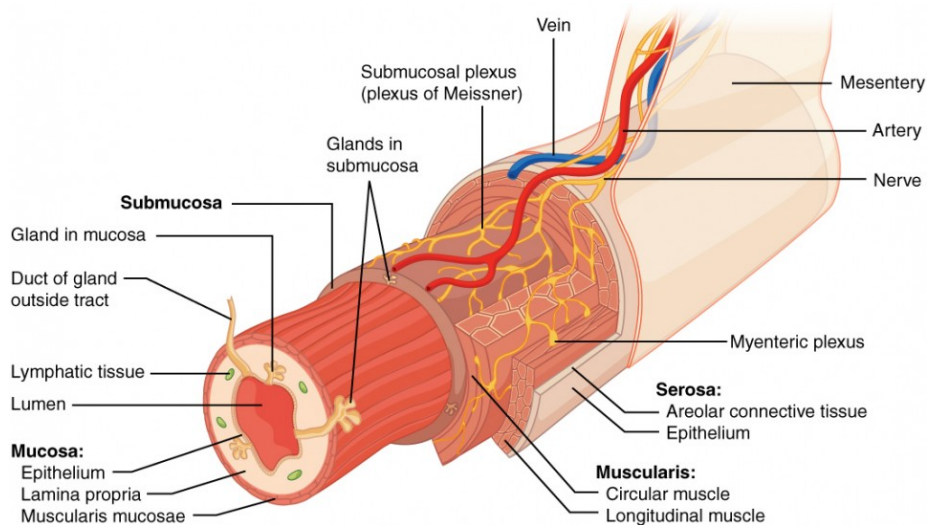


Figura 3.1: Capas del tubo digestivo. Adaptado de *Layers of the Alimentary Canal*, por OpenStax College, Rice University, 2013, OpenStax CNX (<https://cnx.org/contents/FPtK1zmmh@22.42:IPvBytyq@15/23-1-Overview-of-the-Digestive-System>). CC BY 4.0

En particular, en los intestinos delgado y grueso, la mucosa tiene principalmente la función de continuar el proceso digestivo iniciado en el estómago, así como el transporte del alimento y la absorción de los nutrientes y del agua que circula en su interior. En ambas secciones del tubo digestivo encontramos células muy similares en el epitelio maduro de la capa de la mucosa, es decir, del tejido que está en contacto con el lumen del tubo digestivo. Cada una de estas células

realiza funciones específicas, las cuales enlistamos brevemente a continuación:

- **Células absortivas:** las cuales se encargan de absorber directamente los nutrientes y el agua en el intestino delgado (que se caracterizan por poseer microvellosidades que maximizan el área de absorción) y de reabsorber agua y electrolitos en el intestino grueso. La morfología y funcionamiento de las células en ambas secciones es similar.
- **Células caliciformes:** cuya función principal es producir moco. Estas células están mucho más presentes en el intestino grueso, pues la producción de moco es necesaria para lubricar el intestino y facilitar el paso de residuos sólidos en este órgano.
- **Células de Paneth:** que tienen la función de mantener inmune la mucosa con secreciones antimicrobianas, ausentes en el intestino grueso.
- **Células enteroendócrinas:** encargadas de producir varias hormonas necesarias en los intestinos.
- **Células M:** que son un tipo de células especializadas en cubrir estructuras del sistema inmune.
- **Células intermediarias:** que componen la mayoría del tejido que se encarga de renovar al epitelio maduro que va muriendo conforme realiza su función.

Sin embargo, aunque esencialmente poseen el mismo tipo de células, la mucosa del intestino delgado se diferencia físicamente de la mucosa del intestino grueso en la organización del epitelio. Esto se debe a la diferencia en sus funciones. Por un lado, el intestino delgado es el principal sitio de la digestión y de la absorción de los alimentos ya digeridos. Así, en este órgano se encuentran vellosidades en el epitelio de la mucosa, las cuales maximizan el área de absorción de los nutrientes, y que están formadas principalmente por las células absortivas propias del órgano (las cuales, como ya se mencionó, poseen a su vez microvellosidades en su pared celular).

Por otro lado, el intestino grueso tiene la función de reabsorber agua que ha sido emitida en forma de secreciones por parte de los órganos anteriores, así como el transporte final de los alimentos no digeridos y desechos de la digestión. Por ello, este órgano posee un epitelio relativamente plano, el cuál se conforma principalmente de las células absortivas propias de este órgano, y de las células caliciformes para lubricar el epitelio.

En ambos órganos, cada una de las células del epitelio maduro provienen de una sola población pequeña de células madre. Dichas poblaciones se encuentran en el fondo de unas estructuras denominadas glándulas intestinales, o también conocidas como criptas de Lieberkühn.

En estas estructuras, el pequeño nicho de células madre está confinado al fondo de la glándula, mientras que en su parte media se compone de las células



(a) Fotomicrografía de un corte de tejido teñido. Las vellosidades son características del órgano.

(b) Fotomicrografía usando microscopio electrónico de barrido. Se aprecian las criptas de Lieberkühn en la parte inferior de las vellosidades.

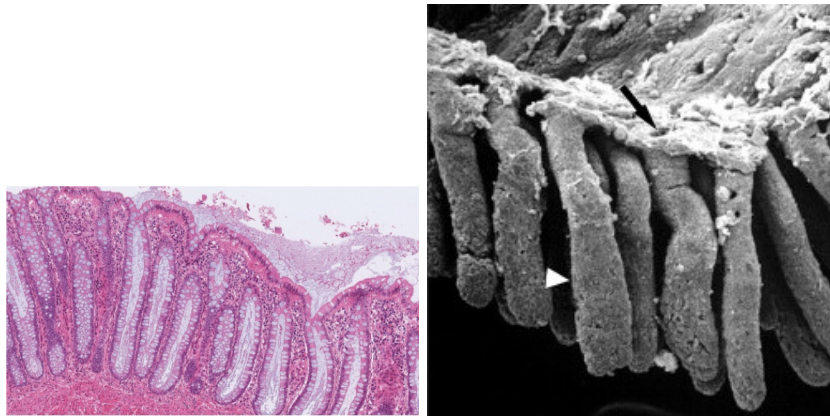
Figura 3.2: Epitelio de la mucosa del intestino delgado. a) Adaptado de *La biopsia de Yeyuno en el proceso diagnóstico de la enfermedad celíaca* (p. S37), por C.D. Álvarez, 2010, *Revista Cubana de Alimentación y Nutrición*, 20 (2), CC BY-NC 4.0

b) Adaptado de *Intestinal Epithelial Stem Cells and Progenitors* (p. 339), por M. Bjerknes y H. Cheng, 2006, *Methods in Enzymology*, 419

intermediarias, las cuales se caracterizan por una rápida proliferación, y varias células en distintas etapas de diferenciación. Además, dependiendo de la especialización que sufrirá cada célula, algunas comenzarán a ascender por la cripta, mantendrán su posición o descenderán de su lugar. Sin embargo la gran mayoría del epitelio, tanto en el intestino delgado como en el intestino grueso, lo conforman las células de absorción y las células caliciformes, las cuales ascienden por la cripta y quedan expuestas hacia la luz del intestino.

Finalmente, y dejando a un lado el intestino delgado, el intestino grueso está conformado por el ciego (que incluye el apéndice), el colon (que conforma la mayor parte del intestino grueso), el recto y el ano. Debido al cambio gradual de las funciones del epitelio del tubo digestivo conforme ocurre la transición del intestino delgado al intestino grueso en el área del ciego, o conforme nos aproximamos al área del recto y el ano, se presentan células y formaciones distintas a las del resto del intestino grueso, que comprende al colon. Así, el tejido epitelial de esa sección es el que presenta mayor uniformidad en su composición.

En el epitelio del colon se encuentran los tipos de células mencionadas antes, salvo las células de Paneth, con la particularidad de que tiene una distribución uniforme de las glándulas intestinales, las cuales se organizan en estructuras de-



(a) Fotomicrografía de un corte de tejido teñido. El epitelio del colon es relativamente plano.

(b) Fotomicrografía con microscopio electrónico de barrido. Las criptas de Lieberkühn son ampliamente notorias.

Figura 3.3: Epitelio de la mucosa del intestino grueso. a) Adaptado de *The histologies of the large intestine and small intestine*, por OpenStax College, Rice University, 2012, OpenStack CNX (<https://openstax.org/books/anatomy-and-physiology/pages/23-5-the-small-and-large-intestines>), CC BY 4.0

b) Adaptado de *Intestinal Epithelial Stem Cells and Progenitors* (p. 339), por M. Bjerknes y H. Cheng, 2006, *Methods in Enzymology*, 419

nominadas ‘territorios’, que contienen cada uno de 25 a 100 orificios glandulares, y que están separados entre sí por surcos en el epitelio. Dicha organización del tejido, como ya se ha mencionado, forma un epitelio relativamente plano (a diferencia de las vellosidades presentes en el intestino delgado) y con una estructura homogénea, cuya función es solo reabsorber agua, electrolitos y transportar los desechos de la digestión.

Se ha estimado que las células de absorción y las células caliciformes en ambos intestinos tienen un promedio de vida de entre 4 y 6 días, periodo después del cual sufren apoptosis y son expulsadas hacia la luz del intestino, que en el caso del colon, ocurre a la mitad entre dos criptas contiguas.

3.2. Un modelo para la reproducción de las células del colon

Dado que un conjunto de células madre es un reservorio permanente para la reposición de tejidos de rápida renovación, y que también aseguran la preservación de la morfología y funcionalidad de las células, resulta interesante e importante estudiar los tejidos cuya tasa de renovación sea alta y que cuenten con el mecanismo de reproducción en donde la fuente principal de células sea

un reservorio de células madre como el descrito antes. El epitelio de los intestinos es uno de ellos, y particularmente el del colon, tal y como se describió antes.

Así, el esquema básico que un órgano con un tejido que tenga las características anteriores usa para mantener el equilibrio entre la pérdida de células y su renovación se puede observar en la figura 3.4.

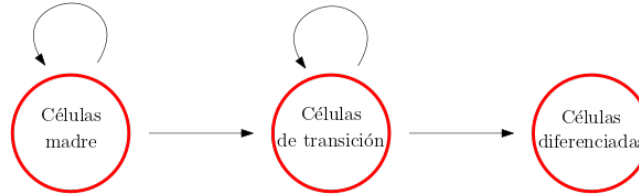


Figura 3.4: Esquema de sustitución de tejido.

El proceso que se sigue, a grandes rasgos, es el siguiente:

1. Un pequeño compartimento en el órgano consistente en el reservorio de células madre se encargará de sustituir el tejido del órgano que muere a consecuencia de su edad o de la función que ejecute. Estas células se caracterizan por formar una cantidad muy pequeña y por reproducirse muy lentamente, gracias a lo cual mantienen a salvo el material genético del tejido, y por lo tanto, al dividirse y procrear nuevas células que posteriormente se especializarán, estas serán idénticas, lo que asegura que al sustituir a las células antiguas, la función del tejido permanecerá sin alteraciones.
2. Al ocurrir una división de una célula madre, una de las dos células producto de la división suele ser una célula madre nuevamente, mientras que la otra suele ser una célula de transición, el cuál es un tipo de célula que ya está en proceso de especializarse pero sin ser aún apta para ejecutar la función del tejido en cuestión. También pueden ocurrir divisiones asimétricas, en donde ambas células producto de la división sean células madre, o células de transición. Las células de transición forman un nuevo compartimento en el tejido del órgano, en donde estas se caracterizan por proliferar de forma rápida. Aquí se alcanza la velocidad de reproducción necesaria para suplir la velocidad a la que muere el tejido a reemplazar. Por ende, este compartimento abarca la parte principal de la estructura del órgano encargada de la formación de células.
3. Finalmente, después de un cierto número de divisiones en el compartimento de las células de transición, estas se diferencian completamente alcanzando el grado de especialización requerido para la función del órgano en cuestión.

Un tejido que siga este esquema rige su comportamiento esencialmente por el número de células madre que hay en el compartimento que las contiene, así

como la tasa de regeneración del tejido. Un ejemplo muy estudiado de sistemas de renovación de tejido con las características anteriores es precisamente el de las criptas del colon.

3.2.1. Descripción del modelo

En la descripción del esquema de renovación de tejido anterior nos encontramos con comportamientos estocásticos. Es usual encontrar modelos deterministas para procesos biológicos por su accesibilidad, sin embargo, dado que el ‘ruido’ es inherente a los sistemas biológicos, usar un modelo estocástico para el fenómeno de la renovación del tejido en el colon es bastante adecuado. Prácticamente cualquier aspecto de la dinámica celular y de la organización del tejido tiene una componente estocástica:

- La densidad del número de criptas por unidad de área en el colon.
- Número de niveles en la organización cilíndrica de la cripta.
- El número de células en la cripta.
- El número de células en cada compartimento (células madre, células de transición, células bien diferenciadas).
- El tiempo de vida celular en cada compartimento.

Los modelos estocásticos toman en cuenta esta componente de imprecisión en estos fenómenos, y además cuentan con la ventaja de que los valores promedio de estos coinciden con las predicciones de los modelos deterministas.

A grandes rasgos, el modelo que se presenta usa un proceso de renovación para contar el número de divisiones de las células madre dentro de la cripta del colon. Luego, usando como base dicho proceso, se modela la cantidad de células madre que hay en la cripta usando un proceso de renovación con premio, en donde el premio consiste en la cantidad de células madre que se crean en cada división. Por otro lado, también podemos ver al conjunto de células de transición como un proceso de renovación con premio, en donde ahora el premio es el número de células madre que se convierten en células de transición. Usando el teorema de renovación con premio en este último proceso, se llega a una ecuación para la tasa promedio de células que se diferencian y salen del compartimento de células madre, en términos de otros parámetros de la misma área de células madre.

Finalmente, para evaluar el modelo que se presenta, se toman datos disponibles en la literatura médica, y se contrasta la cantidad de células de transición de una cripta que la literatura arroja con la cantidad de células de transición que el modelo predice. Asimismo, se hace una predicción del número de divisiones que una célula de transición debe presentar, antes de especializarse completamente.

3.2.2. El compartimento de células madre

Tomando en cuenta toda la información vertida anteriormente, así como el esquema de reproducción de las células del colon, comenzamos por describir algunas cantidades.

En una cripta del colon nos enfocamos en el compartimento de células madre, pues son estas las que dictan el comportamiento del proceso de renovación de tejido. A partir del hecho de que la mayoría de las células de una cripta del colon son células de absorción y células caliciformes, asumiremos que las criptas están conformadas solamente por un mismo tipo de células.

Supongamos que comenzamos a realizar la medición de las cantidades en un tiempo $t = 0$. Asumimos que el número de divisiones que han ocurrido hasta un instante $t > 0$ arbitrario en la cripta es una variable aleatoria con media y varianza definidas. Así, como función del tiempo, tal variable la denotamos como $N(t)$, y por lo tanto $(N(t))_{t \geq 0}$ resulta ser un proceso estocástico que nos indica el número de divisiones que han ocurrido en el compartimento de células madre al tiempo $t > 0$.

Ahora, los eventos ocurren cuando una célula madre entra en mitosis y da origen a un par de células nuevas, y dada la lenta proliferación de las células madre en la cripta, es razonable suponer que para tiempos suficientemente pequeños, sólo ocurre una división, o en otras palabras, en cada instante $t > 0$ a lo más puede ocurrir una división.

De esta forma, definimos a la variable aleatoria W_i como el instante de tiempo en el que ocurre la i -ésima división en el compartimento de células madre desde que comenzamos la medición. Tenemos así al proceso $(W_n)_{n \geq 0}$ de los instantes de tiempo en los que ocurre una división en el compartimento de células madre. Definimos también a las variables $(T_n)_{n \geq 1}$ como los intervalos de tiempo entre las divisiones, los cuales suponemos variables independientes e idénticamente distribuidas, con media $0 < \mathbb{E}(T_1) < \infty$. Tenemos así que $T_i = W_i - W_{i-1}$ para cualquier $i \geq 1$.

Con esto hemos construido nuestro proceso de renovación $(N(t))_{t \geq 0}$, con $(W_n)_{n \geq 0}$ los tiempos en los que ocurre una división, y $(T_n)_{n \geq 0}$ los tiempos entre divisiones.

Ahora, sea $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, y consideremos la división de células madre que corresponde al instante W_i . Nos encontramos ante tres posibles casos como se muestra en los siguientes diagramas:

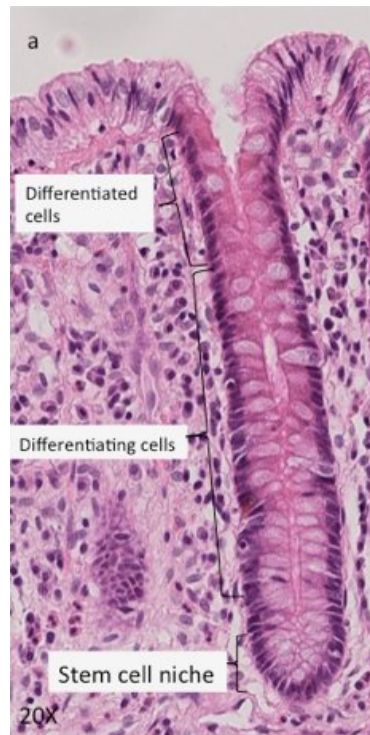
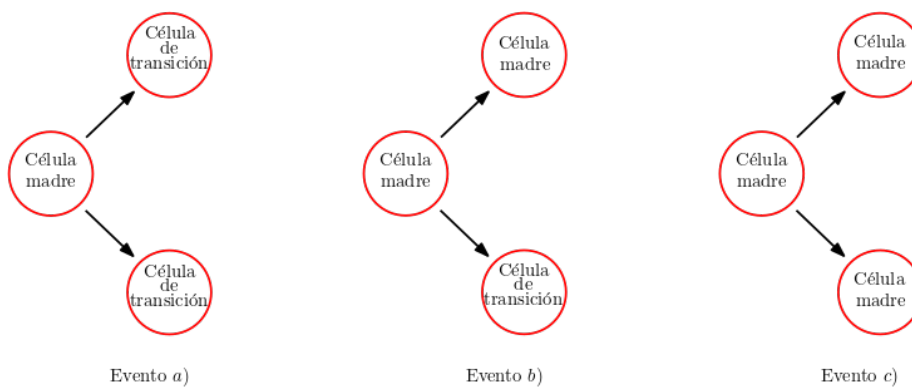


Figura 3.5: Corte longitudinal de una cripta con su respectivo etiquetado de las secciones celulares que la conforman. Adaptado de "Basics in molecular evolution of colorectal cancer and their implications for the surgeon: is it a 'big-bang' or a 'survival of the toughest'?" (p. 19), por P.C. Chandrasinghe, 2018, *The Sri Lanka Journal of Surgery*, 36 (2) CC BY 4.0



- a) La división celular al tiempo W_i es asimétrica, teniendo como resultado a dos células descendientes que son células de transición.

- b) La división celular al tiempo W_i es simétrica, teniendo como resultado una célula descendiente que es célula madre, mientras que la otra resulta ser una célula que se diferenció en una célula de transición.
- c) La división celular al tiempo W_i es asimétrica, y esta vez las dos células descendientes son células madre.

Con base en estos eventos, definimos las variables aleatorias i.i.d. $(I_n)_{n \geq 1}$ como sigue:

$$I_n = \begin{cases} -1, & \text{con probabilidad } p, \text{ si ocurre el evento } a), \\ 0, & \text{con probabilidad } q, \text{ si ocurre el evento } b), \\ 1, & \text{con probabilidad } r, \text{ si ocurre el evento } c), \end{cases} \quad n \geq 0.$$

Con las variables anteriores, modelamos el número de células madre que resultan de la división. De esta forma, si en alguna división en el compartimento de células madre, las dos células descendientes son células madre, el compartimento gana una célula. Si ambas son de transición, el compartimento pierde una, y si la división es simétrica, el compartimento queda estable.

Finalmente, definimos al proceso $(N_m(t))_{t \geq 0}$ como sigue:

$$\forall t \geq 0, \quad N_m(t) = K + \sum_{n=1}^{N(t)} I_n,$$

es decir, $(N_m(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de renovación con premio que comienza en $K \in \mathbb{N}$, y que de acuerdo a la definición de las variables I_n , nos indica el número de células madre que han sido creadas en el compartimento propio de estas células al tiempo t , más una cierta constante natural K .

Ahora, en el fondo de una cripta existe siempre una cantidad estable de células madre, por lo que si $(N_m(t))_{t \geq 0}$ es el proceso que nos indica la cantidad de células madre en su respectivo compartimento, entonces la esperanza de $N_m(t)$ debe ser constante para cualquier $t \geq 0$. Esto es sencillo de obtener si asumimos que el tipo de divisiones (eventos a), b) o c) que ocurren en un cierto instante, es independiente del número de divisiones que han ocurrido en la cripta hasta ese momento, entonces el proceso $(N(t))_{t \geq 0}$ es independiente de la sucesión $(I_n)_{n \geq 1}$, por lo que usando la identidad de Wald:

$$\mathbb{E}(N_m(t)) = \mathbb{E} \left(K + \sum_{n=1}^{N(t)} I_n \right) = K + \mathbb{E}(N(t))\mathbb{E}(I_n),$$

pero $\mathbb{E}(I_n) = -p + r$, mientras que $\mathbb{E}(N(t)) = m(t)$ es la función de renovación del proceso $N(t)$, así que:

$$K + \mathbb{E}(N(t))\mathbb{E}(I_n) = K + m(t)(-p + r).$$

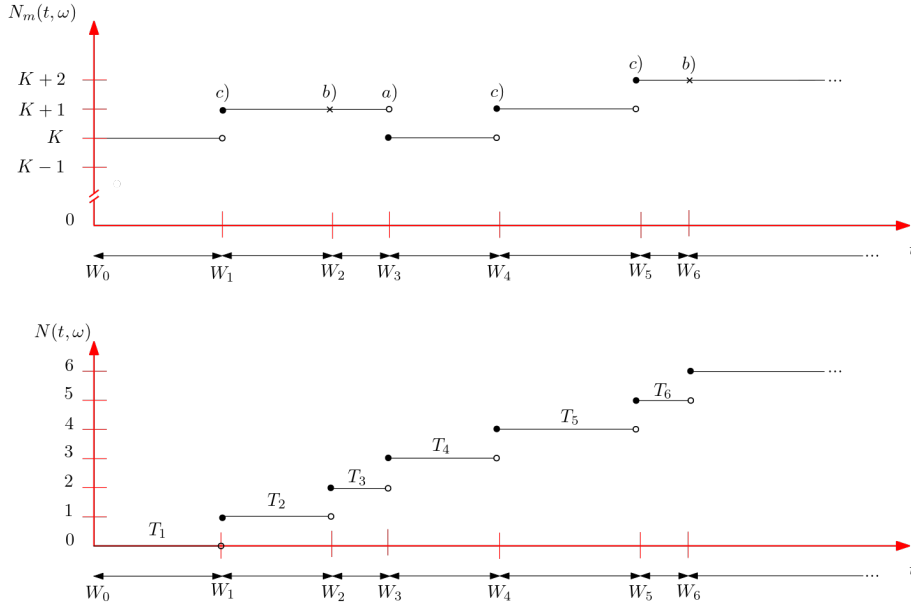


Figura 3.6: Una trayectoria del proceso $N(t)$ contrastada con una trayectoria de la misma realización pero del proceso $N_m(t)$, que cuenta el número de células madre que hay en la cripta. Dependiendo de qué tipo de división ocurre en cada evento W_i , la trayectoria de $N_m(t)$ bajará una unidad si hay una división asimétrica que origine dos células de transición (el evento a), quedará igual si hay una división simétrica (el evento b), o subirá en una unidad si hay una división asimétrica que origina dos células madre (el evento c).

De esta forma, si queremos modelar el hecho de que el número de células que hay en el compartimento de células madre es constante, una forma razonable es asumir que $(-p + r) = 0$, es decir, que cada que una célula madre se divide, la probabilidad de que las dos células resultantes sean células madre es igual a la probabilidad de que ambas células sean de transición. De esta forma, el término $m(t)(-p + r)$ se anula, por lo que definiendo la constante K como el número promedio estimado de células madre que hay en una cripta, que denotaremos por \bar{N}_m y del cual existen estimaciones que se encuentran disponibles en la literatura, hemos cumplido que:

$$\mathbb{E}(N_m(t)) = K = \bar{N}_m$$

es una constante, para cualquier $t > 0$.

Ahora, en busca de modelar el surgimiento de células de transición que finalmente se especializarán en el tejido del colon, definimos el siguiente conjunto

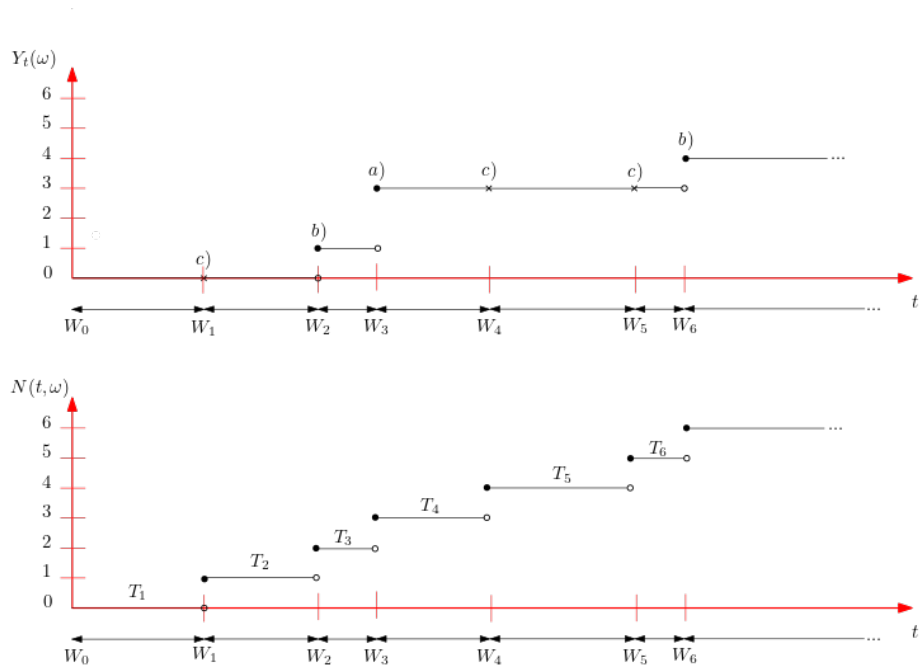


Figura 3.7: La misma trayectoria del proceso $N(t)$ contrastada ahora con la del proceso $Y(t)$, que cuenta el número de células de transición que salen del compartimento de células madre. En la trayectoria de $Y(t)$, los eventos $a)$ corresponden a saltos de dos unidades, pues en la división de la célula madre se originan dos células de transición. Los $b)$ corresponden a solo un salto, pues la división celular produce una célula de cada tipo, y los $c)$ no representan saltos, pues la división produce dos células madre.

de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$S_n = \begin{cases} 2, & \text{con probabilidad } p, & \text{si ocurre el evento } a), \\ 1, & \text{con probabilidad } q, & \text{si ocurre el evento } b), \\ 0, & \text{con probabilidad } p, & \text{si ocurre el evento } c), \end{cases} \quad n \geq 0.$$

Recordemos que durante una división de células madre, en el evento $a)$ las dos células resultantes son de transición, en el evento $c)$ las dos células resultantes son células madre nuevamente, y en el $b)$ una célula es de transición y la otra es célula madre.

Las variables anteriores capturan la cantidad de células de transición que se originan en la n -ésima división, por lo que usando nuevamente al proceso

$(N(t))_{t \geq 0}$ como base, definimos

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} S_n, \quad t \geq 0.$$

De esta forma, $(Y(t))_{t \geq 0}$ resulta ser un proceso de renovación con premio, que modela el número de células madre que se han diferenciado en células de transición hasta el tiempo t . Este proceso resulta bastante importante para estudiar el comportamiento de las células de transición, las cuales conforman la mayoría del cuerpo de la cripta.

A continuación, listamos los parámetros que definen esencialmente el comportamiento de las células madre a cualquier instante $t > 0$:

- El número de células madre en cualquier instante, es el proceso $(N_m(t))_{t \geq 0}$.
- El tiempo promedio de vida de una célula madre, que denotamos por C .
- Las probabilidades de división simétrica p y asimétrica q (recordemos que $2p + q = 1$).

De esta forma, usando el teorema de renovación con premio, obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(Y(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}(S_1)}{\mathbb{E}(T_1)},$$

donde recordemos que S_n son las variables que cuentan el número de células de transición que aparecen en la n -ésima división de células madre, y T_n es el tiempo que transcurre entre la división n y la $n + 1$.

La ecuación anterior relaciona la cantidad de células madre que se han diferenciado en células de transición (en promedio) por unidad de tiempo, con las probabilidades de que ocurran las mitosis simétricas o asimétricas, así como el tiempo que estas tardan en ocurrir en el compartimento de células madre.

Ahora, por un lado sabemos que $\mathbb{E}(S_1) = 2p + q + 0p = 2p + q$ por definición de dichas variables, mientras que por otro, $\mathbb{E}(T_1)$ es el tiempo que tarda en ocurrir una mitosis en el fondo de la cripta (en promedio). Dicha cantidad es razonable de estimar de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{C}{\bar{N}_m},$$

donde C es el tiempo de vida promedio de una célula madre, y \bar{N}_m es el número promedio de células madre que hay en la cripta. Lo anterior asume que todas las células madre tienen las mismas oportunidades de dividirse. Esto tiene sentido pues es esperable que, si una célula madre se divide en promedio cada C horas, entonces al haber en promedio \bar{N}_m células madre en la cripta, una mitosis en

el compartimento de células madre debería ocurrir cada $\frac{C}{\bar{N}_m}$ horas.

Una manera de justificar la suposición anterior consiste en lo siguiente: asumamos que $(X_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas, exponenciales, y de parámetro $\frac{1}{C}$, donde C es la constante descrita antes. Podemos interpretar a cada X_n como los tiempos en los que cada una de las $N_m(t)$ células madre tardan en entrar en mitosis de forma individual. Entonces podemos reescribir a los tiempos entre divisiones T_i en la cripta como:

$$T_1 = \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m}\} \quad \text{y} \quad T_i = \min\{X_1, X_2, \dots, X_{N_m(W_{i-1})}\}, \quad i \geq 2,$$

donde recordemos que nuestro proceso $N_m(t)$ comienza en $K = \bar{N}_m$ y para $i \geq 2$, W_{i-1} es el instante en el cual ocurre la $i - 1$ división en la cripta. Sabiendo que el mínimo de una cantidad fija de variables aleatorias exponenciales independientes entre sí tiene distribución exponencial de la suma de los parámetros, podemos deducir para T_1 que:

$$T_1 \sim \exp\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \dots + \frac{1}{C}\right) = \exp\left(\frac{\bar{N}_m}{C}\right),$$

y por lo tanto $\mathbb{E}(T_1) = \frac{C}{\bar{N}_m}$. Estudiemos ahora el comportamiento de las variables T_i para $i \geq 2$ bajo estos supuestos.

En el caso $i = 2$, se tiene $T_2 = \min\{X_1, \dots, X_{N_m(W_1)}\}$, y dado que ya ha ocurrido la primer división en el compartimento de células madre desde que iniciamos nuestro proceso, para conocer la distribución de esta variable aleatoria necesitamos condicionar a los valores que puede tomar $N_m(W_1)$. Recordemos que

$$N_m(W_1) = \bar{N}_m + \sum_{n=1}^{N_{W_1}} I_n = \bar{N}_m + \sum_{n=1}^1 I_n = \bar{N}_m + I_1,$$

la cual es una variable aleatoria tal que

$$N_m(W_1) = \begin{cases} \bar{N}_m - 1 & \text{con probabilidad } p, \text{ si ocurre el evento a),} \\ \bar{N}_m & \text{con probabilidad } q, \text{ si ocurre el evento b),} \\ \bar{N}_m + 1 & \text{con probabilidad } p, \text{ si ocurre el evento c),} \end{cases}$$

de modo que la distribución condicional de T_2 dado $N_m(W_1)$ está dada por:

$$T_2|_{N_m(W_1)} = \begin{cases} \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m-1}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m-1}{C}\right) & \text{si ocurre el evento a),} \\ \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m}{C}\right) & \text{si ocurre el evento b),} \\ \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m+1}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m+1}{C}\right) & \text{si ocurre el evento c),} \end{cases}$$

de modo que $T_2|_{N_m(W_1)} \sim \exp\left(\frac{N_m(W_1)}{C}\right)$, y por lo tanto:

$$\mathbb{E}(T_2|N_m(W_1)) = \frac{C}{N_m(W_1)}.$$

Y con la distribución de la variable condicional $T_2|_{N_m(W_1)}$, podemos encontrar la esperanza de T_2 utilizando la propiedad de torre:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_2|N_m(W_1))) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{C}{N_m(W_1)}\right) \\
&= C\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_m(W_1)}\right) \\
&= C\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{N}_m + I_1}\right) \\
&= C\left(\frac{p}{\bar{N}_m - 1} + \frac{q}{\bar{N}_m} + \frac{p}{\bar{N}_m + 1}\right) \\
&= C\left(\frac{p\bar{N}_m + q\bar{N}_m - q}{\bar{N}_m(\bar{N}_m - 1)} + \frac{p}{\bar{N}_m + 1}\right) \\
&= C\left(\frac{\bar{N}_m(p\bar{N}_m + q\bar{N}_m - q) + p\bar{N}_m + q\bar{N}_m - q + p\bar{N}_m^2 - p\bar{N}_m}{\bar{N}_m(\bar{N}_m^2 - 1)}\right) \\
&= C\left(\frac{\bar{N}_m^2(2p + q) - q}{\bar{N}_m(\bar{N}_m^2 - 1)}\right) \\
&= \frac{C(\bar{N}_m^2 - q)}{\bar{N}_m(\bar{N}_m^2 - 1)}
\end{aligned}$$

La cantidad anterior no coincide de manera exacta con el parámetro $\frac{C}{\bar{N}_m}$, no obstante, es una buena aproximación: Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012), basándose en la observación mucho más frecuente de divisiones simétricas de células madre en las criptas en trabajos previos sobre la dinámica del colon, estiman la probabilidad de división simétrica en $q = 0,9$. Por otro lado, los autores afirman que la cantidad media de células madre en tal compartimento \bar{N}_m se estima entre 19 y 37 (véase la subsección 3.2.4). Así, asumiendo $q = 0,9$ y que $\bar{N}_m \in [19, 37]$, se tiene que

$$\frac{\bar{N}_m^2 - q}{\bar{N}_m^2 - 1} \in [1.00027\dots, 1.00007\dots],$$

así que es razonable realizar la aproximación:

$$\frac{C(\bar{N}_m^2 - q)}{\bar{N}_m(\bar{N}_m^2 - 1)} \approx \frac{C}{\bar{N}_m}.$$

Para el caso $i > 2$, notemos primero que

$$N_m(W_{i-1}) = \bar{N}_m + \sum_{n=1}^{N_{W_{i-1}}} I_n = \bar{N}_m + \sum_{n=1}^{i-1} I_n,$$

la cual resulta ser una variable aleatoria que toma valores dentro del conjunto $\{\bar{N}_m - (i - 1), \dots, \bar{N}_m, \bar{N}_m + 1, \dots, \bar{N}_m + i - 1\}$. Luego, la variable aleatoria $T_i = \min\{X_1, X_2, \dots, X_{N_m(W_{i-1})}\}$ condicionada al valor de $N_m(W_{i-1})$ es

$$T_i |_{N_m(W_{i-1})} = \begin{cases} \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m - (i-1)}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m - (i-1)}{C}\right) & \text{con proba } p_{-i+1}, \\ \vdots & \\ \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m}{C}\right) & \text{con proba } p_0, \\ \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m+1}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m+1}{C}\right) & \text{con proba } p_1, \\ \vdots & \\ \min\{X_1, \dots, X_{\bar{N}_m+i-1}\} \sim \exp\left(\frac{\bar{N}_m+i-1}{C}\right) & \text{con proba } p_{i+1}, \end{cases}$$

donde $\sum_{n=-i+1}^{i-1} p_n = 1$, y siempre que $\bar{N}_m - i + 1 > 0$. Esto es, se tiene que

$$T_i |_{N_m(W_{i-1})} \sim \exp\left(\frac{N_m(W_{i-1})}{C}\right)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_i | N_m(W_{i-1}))) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{C}{N_m(W_{i-1})}\right) \\ &= C \left(\sum_{n=-i+1}^{i-1} \frac{p_n}{\bar{N}_m + n} \right) \\ &= \frac{C}{\bar{N}_m} \left(\sum_{n=-i+1}^{i-1} \frac{\bar{N}_m \cdot p_n}{\bar{N}_m + n} \right), \end{aligned}$$

Ahora bien, las probabilidades p_n tienden a ser despreciables conforme el índice n se aleja de 0, ya que la probabilidad p de divisiones asimétricas, estimada en 0,05, que lleven a una eventual ganancia o pérdida de células madre en la cripta es mucho más pequeña comparada con la probabilidad de divisiones simétricas q que conserven el equilibrio de células madre, cantidad estimada en 0,9. De esta manera, se tiene por un lado que, si $i > 2$ es tal que $\bar{N}_m - i + 1$ se acerca a 0, es decir que en nuestro modelo la cantidad de células madre en la cripta se acerque a 0, entonces podemos descartar tal suceso pues su probabilidad es despreciable. Y por otro lado, la cantidad

$$\sum_{n=-i+1}^{i-1} \frac{\bar{N}_m \cdot p_n}{\bar{N}_m + n}$$

aproxima de forma razonable a 1, por lo que entonces

$$\frac{C}{\bar{N}_m} \left(\sum_{n=-i+1}^{i-1} \frac{\bar{N}_m \cdot p_n}{\bar{N}_m + n} \right) \approx \frac{C}{\bar{N}_m}$$

y así, recuperamos el parámetro buscado.

Aunque hemos deducido la cantidad anterior con las hipótesis extra en el modelo, la suposición de tales propiedades queda sujeta a discusión biológica: suponer que el conjunto de variables aleatorias $(X_n)_{n \geq 1}$ sea i.i.d. con distribución exponencial resta generalidad al modelo. No obstante, la distribución idéntica de las variables aleatorias está de acuerdo con la dinámica de la cripta, pues el pequeño cúmulo de células madre precisamente deben terminar regenerando todo el tejido, lo cuál debe suceder en forma homogénea.

No ocurre lo mismo con las otras dos hipótesis, pues la independencia de las variables no pareciera representar fielmente la realidad, ya que las células son entes vivientes que tienen comunicación entre sí, y que reaccionan a cambios repentinos en el medio, así que la suposición de que una célula del conjunto se reproduce prácticamente de forma independiente a las demás no parece ser del todo adecuada si se piensa en el fenómeno a largo plazo, donde alguno de estos cambios en el medio pueden ocurrir.

Por lo que respecta a la hipótesis de la distribución exponencial, resulta ser una suposición bastante particular, pues si analizamos la propiedad de pérdida de memoria, el que la probabilidad de que una célula se divida después de un tiempo $s + t$ dado que no se ha dividido hasta el instante s sea simplemente la probabilidad de que se divida luego de un tiempo t contradice en parte la naturaleza de las células del colon conforme el tiempo pasa: estas tienen un tiempo de vida promedio de 4 a 6 días como se explicó al inicio de la sección, además de que las células madre tienen una proliferación bastante lenta, por lo que asumir que exista una especie de reinicio de la probabilidad de división de las células como el que nos otorga la una distribución exponencial tampoco parece del todo acertado pensando en un tiempo de medición largo.

Ya sea que asumamos algunas hipótesis extras al modelo como se discutió anteriormente, o asumiendo simplemente el valor de la esperanza de los tiempos entre mitosis, tenemos que $\mathbb{E}(S_1) = 2p + q$ mientras que $\mathbb{E}(T_1) = \frac{\bar{N}_m}{C}$, por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(Y(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}(S_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{\bar{N}_m(2p + q)}{C},$$

y si interpretamos al límite anterior como la tasa de salida de células madre que se convirtieron en células de transición por unidad de tiempo, y la denotamos por R_m^{salida} , concluimos que

$$R_m^{salida} = \frac{\bar{N}_m(2p + q)}{C}.$$

3.2.3. El compartimento de células de transición

Como ya hemos dicho anteriormente, las células que conforman este compartimento de la cripta proliferan de forma prodigiosa para contrarrestar la alta tasa de muerte celular que hay en el exterior de la cripta.

Desde el punto de vista matemático, esta área se puede ver como un amplificador de la tasa de células que llegan hacia ella desde el compartimento de células madre.

Asumamos que C_T es el tiempo de vida promedio de una célula de transición, es decir, el tiempo promedio que una célula de este compartimento tarda en entrar en mitosis. De esta forma, el número de células que entran al compartimento en un lapso de tiempo igual a C_T , que denotaremos por $K_T^{entrada}$, está determinado por la tasa de salida del compartimento de células madre por unidad de tiempo, R_m^{salida} , que hallamos anteriormente. Así, tenemos

$$K_T^{entrada} = R_m^{salida} \cdot C_T,$$

el cual es el número de células que entran en el compartimento de transición durante un lapso de tiempo igual a C_T , en promedio.

Con esto, observemos que, si comenzamos a medir la cantidad de células que recién ingresan al compartimento de transición en el tiempo $t = 0$, luego de haber transcurrido un lapso $t = C_T$, hasta ese momento han entrado en promedio $K_T^{entrada}$ células al compartimento de transición. Si dejamos transcurrir ahora otro lapso de C_T unidades de tiempo, en el instante $t = 2C_T$ habrán entrado en promedio otra cantidad $K_T^{entrada}$ de células al compartimento, pero las $K_T^{entrada}$ que había al instante $t = C_T$ se han duplicado en promedio, ya que precisamente C_T es el tiempo que tarda en entrar una célula de transición en mitosis.

Siguiendo con el razonamiento, luego de l veces el tiempo promedio C_T , es decir, luego de una cantidad $l \cdot C_T$ de tiempo ($l \in \mathbb{N}$), tendremos una cantidad promedio de células igual a

$$K_T^{entrada} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^l) = K_T^{entrada} (2^{l+1} - 1).$$

Todas estas células han ingresado y se han reproducido dentro del compartimento de transición, desde que comenzamos la medición en $t = 0$, mas no contemplamos las células que ya habían en nuestro compartimento al momento de iniciar la medición en $t = 0$.

No obstante, si definimos a $l_T \in \mathbb{N}$ como la cantidad promedio de mitosis que sufre una célula de transición en su compartimento antes de diferenciarse por completo y convertirse en una célula especializada, entonces $l_T \cdot C_T$ es la cantidad promedio de tiempo que dichas células viven dentro del compartimento de transición. De esta forma, podemos estimar la cantidad de células en el

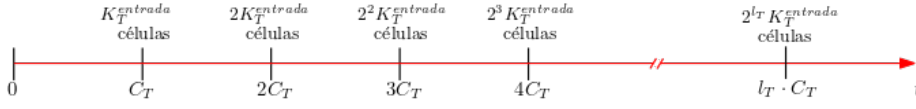


Figura 3.8: Si comenzamos a estudiar la cripta en $t = 0$, luego de un lapso C_T , el compartimento de células madre crea $K_T^{entrada}$ células de transición en promedio. Siguiendo el trayecto de estas por el compartimento de transición, luego de l_T lapsos promedio de mitosis, se multiplican en $2^{l_T} K_T^{entrada}$ células, punto a partir del cuál, en promedio, estas se terminan de especializar.

compartimento de transición, que denotaremos como \bar{N}_T , como

$$\bar{N}_T = K_T^{entrada} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{l_T}) = K_T^{entrada} (2^{l_T+1} - 1),$$

y por lo tanto la tasa de salida del compartimento de transición está dada por

$$R_T^{salida} = 2^{l_T} \cdot R_m^{salida},$$

lo cual captura la idea del inicio sobre el compartimento de transición como el área de la cripta que se encarga de alcanzar una cantidad de células suficiente para cubrir la demanda de células nuevas por parte del colon.

3.2.4. Predicción del número de divisiones y células de transición

Ahora vamos a usar algunos datos conocidos sobre la cripta para predecir algunos datos sobre la cantidad de células en ella. De acuerdo con Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012), una cripta promedio del colon humano tiene aproximadamente 82 niveles desde el fondo hasta el tope de la cripta. El nivel de fondo contiene sólo una célula, mientras que los niveles 2 a 7 contienen 6, 12, 18, 24, 30 y 36 células en promedio, respectivamente. La parte de los niveles 8 a 82 contienen 42 células por cada nivel, sumando así un total de 3277 células por cripta.

Marcadores celulares nos indican que las células madre predominantemente habitan los primeros 3 o 4 niveles de la cripta, donde hasta el nivel 3 hay alrededor de 19 células en total, y hasta el nivel 4 hay alrededor de 37 (p. 206).

Para nuestro caso, vamos a asumir que el número promedio de células madre en el compartimento del fondo de la cripta es de 28. Nuevamente Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012) comentan que otros marcadores celulares indican que los niveles 4 a 45 de la cripta pueden ser considerados como el compartimento de transición, dada la naturaleza de proliferación de estas células (p. 206) El resto de células en los niveles 46 a 82, que suman un total de 1563, es el número de células en el compartimento de células bien diferenciadas. Condensamos las cantidades anteriores como sigue:

$$\bar{N}_m = 28, \bar{N}_T^* = 1686, \bar{N}_{BD} = 1563,$$

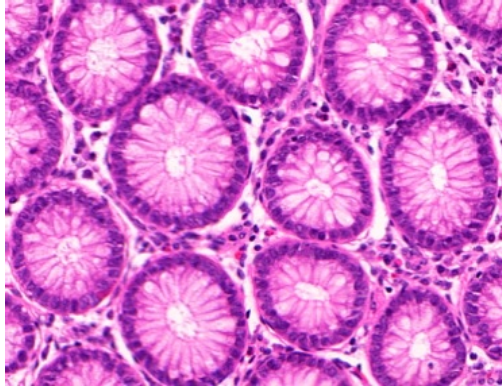


Figura 3.9: Corte transversal del epitelio del colon. Se revelan las células que están ubicadas en un determinado nivel de las criptas. Adaptado de "Segmentation and Grade Prediction of Colon Cancer Digital Pathology Images Across Multiple Institutions" (p. 2), por S. Rathore, M.A. Iftikhar, A. Chaddad, T. Niazi, T. Karasic y M. Bilello, 2019, *Cancers*, 11 (1700) CC BY 4.0

donde \bar{N}_m es el número promedio de células madre en la cripta, \bar{N}_T^* es el número promedio de células de transición que vamos a contrastar con el que el modelo arroje, y \bar{N}_{BD} es el número promedio de células bien diferenciadas.

Como expusimos en la sección del colon, Ross y Pawlina (2016) afirman que el tiempo de renovación celular de la cripta es de 4 a 6 días (p. 645, 647), por lo que para nuestros propósitos tomaremos el tiempo de 5 días como promedio. Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012) afirman que el 95 % de las células han sido sustituidas en ese periodo (p. 206). De esta forma, podemos estimar la tasa de salida de células del compartimento bien diferenciado (y por lo tanto de toda la cripta) como:

$$R^{salida} = \frac{(0.95)(3277 \text{ células})}{120 \text{ h}} \approx 25.94 \text{ células/h.}$$

es decir, estimamos que la tasa a la que las células salen de la cripta como células ya especializadas, es de 25.94 células por cada hora.

Ahora bien, dada la alta especialización de las células bien diferenciadas, su capacidad reproductiva es mínima, por lo que se asume que la tasa de salida del compartimento bien diferenciado (y por lo tanto de toda la cripta) es igual a la tasa de salida del compartimento de transición, es decir:

$$R^{salida} = R_T^{salida}.$$

Recordando lo dicho en la sección pasada, teníamos

$$R_T^{salida} = 2^{l_T} \cdot R_m^{salida},$$

de donde concluimos que

$$R_m^{salida} = 2^{-l_T} \cdot R_T^{salida}.$$

Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012) usan estimaciones de parámetros obtenidas en trabajos previos sobre la dinámica de las criptas del colon y señalan los siguientes datos:

- El tiempo de vida promedio de una célula madre es de aproximadamente $C = 90$ horas, tiempo después del cuál la célula entra en mitosis. Esto dada la baja proliferación de células madre en el fondo de la cripta.
- La evidencia apunta a que las divisiones asimétricas son mucho más raras que las divisiones simétricas, por lo que se asume que la probabilidad de una división asimétrica es: $p = r = 0.05$, con lo que la probabilidad de una división simétrica es de $q = 0.9$.

Luego, con estos valores, estimamos R_m^{salida} como sigue:

$$R_m^{salida} = \frac{\bar{N}_m(2p + q)}{C} = \frac{(28 \text{ células})(2(0.05) + 0.9)}{90 \text{ h}} \approx 0.31111 \text{ células/h},$$

es decir, estimamos la tasa de salida del compartimento de células madre en 0.3111 células por cada hora. Esto nos indica que aproximadamente cada poco más de 3 horas, una célula producto de la división de una célula madre se convierte en una célula de transición.

Pero habíamos llegado antes a una expresión para la tasa de salida de las células madre en términos de la tasa de salida de las células de transición:

$$0.31111 \approx R_m^{salida} = 2^{-l_T} \cdot R_T^{salida} = 2^{-l_T}(25.94),$$

de donde deducimos que el número de mitosis promedio de una célula de transición antes de terminar de diferenciarse es de

$$l_T \approx \log_2 \left(\frac{25.94}{0.31111} \right) \approx 6.3816.$$

Por último, Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012) sugieren las siguientes estimaciones de los tiempos de vida de una célula de transición medido en horas:

$$C_T \in [29.9, 39.9],$$

de donde nosotros tomamos el punto medio del intervalo como el tiempo medio de vida de una célula de transición: $\overline{C_T} = 34.9$ h (p. 207).

Con estos datos, y con la estimación sobre el número de células de transición que hallamos con el modelo anteriormente presentado, tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{N}_T &= K_T^{entrada}(2^{l_T+1} - 1) \\ &= (R_m^{salida} \cdot \bar{C}_T)(2^{l_T+1} - 1) \\ &\approx (0.31111)(34.9)(2^{7.3816} - 1) \\ &\approx 1800 \text{ células}\end{aligned}$$

Y usando los extremos del intervalo [29.9, 39.9] donde se estima el valor C_T , tenemos que el número de células que el modelo estima para el conjunto de células de transición es

$$\bar{N}_T \approx 1800 \pm 257 \text{ células,}$$

el cuál en promedio tiene una diferencia de 114 con el número de células $\bar{N}_T^* = 1686$ que se obtuvo al inicio de los datos sobre la cripta en general, y que se mantiene dentro del intervalo que arrojan los extremos de la estimación del tiempo de vida de una célula de transición.

3.3. Conclusiones

En este capítulo se presentó un modelo para la reproducción de las células madre en las criptas del colon. Los eventos que dan origen al proceso de renovación son la división de una célula madre en el fondo de las criptas. Se definieron dos procesos de renovación con premio asociados al proceso de renovación que cuenta el número de divisiones que han ocurrido hasta el instante $t > 0$: el primero de ellos cuenta el número de células madre que hay en el nicho en cualquier instante. El segundo cuenta el número de células que salen del nicho de células madre y comienzan a diferenciarse.

En este último proceso se aplica el teorema de renovación con premio para asociar la cantidad de células madre que se empiezan a diferenciar (y que provee información sobre el nicho de células madre en sí) con cantidades exteriores a tal zona, como la tasa a la que células maduras del colon mueren y deben ser reemplazadas.

A partir del modelo es posible predecir cantidades que son de interés en el estudio del nicho de células madre en las criptas del colon. Vanaja, Feinberg y Levchenko (2012) afirman que, aunque la dinámica de las criptas es bien conocida en general, el estudio específico de la reproducción de las células madre en el fondo de las criptas ha resultado complicado. Cantidades como las probabilidades con las que ocurren las divisiones simétricas o asimétricas en el nicho de células madre de las criptas son poco conocidas, así como el tiempo en el que una célula madre tarda en entrar en mitosis. Esto dada la dificultad para conseguir información sobre la reproducción celular debido a la poca actividad

que presenta esa zona.

Teniendo en mente lo anterior, el modelo sirve para poner a prueba aproximaciones experimentales a las cantidades poco conocidas mencionadas antes. Al introducir dichas cantidades al modelo se obtienen estimaciones de la cantidad de células en el compartimento de transición, el cual es un dato mejor conocido en la literatura. Luego, contrastando los datos arrojados por el modelo con los datos conocidos sobre el compartimento de células de transición, se corrobora la validez de las aproximaciones sobre el tiempo de vida celular en el compartimento de células madre junto con las probabilidades de división simétrica y asimétrica.

El uso de los procesos de renovación con premio para el fenómeno resulta adecuado dada la cantidad de variables desconocidas y de naturaleza aleatoria que se involucran en él, sirviendo como una herramienta para poner a prueba estimaciones sobre cantidades de difícil estudio en las criptas del colon, y revelando también potencia de resultados teóricos en procesos estocásticos, como el teorema de renovación con premio, y su aplicabilidad en la realidad, a pesar de la sencillez que pueda residir en su enunciado.

Apéndice A

La exponencial de una matriz

En este apéndice desarrollaremos la teoría que concierne a la exponencial de una matriz finita, necesaria para la solución de las ecuaciones *backward* y *forward* de Kolmogorov de una cadena con espacio de estados finito.

Consideremos al espacio normado $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ y al conjunto $M_{N \times N}(\mathbb{R})$ de las matrices de $N \times N$ con coeficientes reales. Vamos a dotar a este último conjunto de dos normas:

Definición A.1. Sea $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$. Definimos las normas

$$|Q| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} \quad y \quad \|Q\|_\infty := \sup_{i,j=1,\dots,N} |Q_{ij}|.$$

El que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma se sigue de que puede verse como la norma del espacio $(\mathbb{R}^{N \times N}, \|\cdot\|_\infty)$. Esta norma “mide” una matriz simplemente con el tamaño de la entrada más grande que la compone.

Por otro lado, debemos verificar que la norma $|\cdot|$ está bien definida y que en efecto sea una norma, pues el supremo mencionado podría no ser finito para una $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ cualquiera. Sin embargo esto lo haremos más adelante, apoyándonos de que $\|\cdot\|_\infty$ en efecto es una norma para este conjunto.

Intuitivamente, la norma $|\cdot|$ “mide” una matriz Q con el supremo de las normas en \mathbb{R}^N de los vectores Qv , donde v es un vector unitario.

Para demostrar que $|\cdot|$ está bien definida y es una norma, tenemos un primer resultado:

Teorema A.2. 1. $\forall Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R}), \quad \|Q\|_\infty \leq |Q| \leq N\|Q\|_\infty.$

2. $\forall Q_1, Q_2 \in M_{N \times N}(\mathbb{R}), \quad |Q_1 + Q_2| \leq |Q_1| + |Q_2| \quad y \quad |Q_1 Q_2| \leq |Q_1| |Q_2|.$

Demostración. 1. Sea $Q \in M_{N \times N}$. Por un lado, para cualquier $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{\bar{0}\}$,

$$\frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} \leq \sup_{v \neq \bar{0}} \frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} = |Q|,$$

y en consecuencia para cualquier $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\|Qv\|_2 \leq |Q| \|v\|_2. \quad (\text{A.1})$$

En particular, para un vector canónico e_j con $j \in \{1, \dots, N\}$ tenemos que

$$\|Qe_j\|_2 \leq |Q|. \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, al ser la matriz finita, la norma $\|Q\|_\infty = \sup_{i,j=1,\dots,N} |Q_{ij}|$ se alcanza en alguna entrada $Q_{i_0 j_0}$. Así,

$$\|Q\|_\infty^2 = |Q_{i_0 j_0}|^2 \leq \sum_{i=1,\dots,N} |Q_{i j_0}|^2 = \|Qe_{j_0}\|_2^2,$$

y juntando lo anterior con (A.2) obtenemos

$$\|Q\|_\infty \leq |Q|.$$

Para la otra desigualdad, notemos que para $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \|Qv\|_2^2 &= \sum_{i=1,\dots,N} \left(\sum_{j=1,\dots,N} Q_{ij} v_j \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1,\dots,N} \left(\sum_{j=1,\dots,N} |Q_{ij} v_j| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1,\dots,N} \left(\sum_{j=1,\dots,N} \|Q\|_\infty |v_j| \right)^2 \\ &\leq \|Q\|_\infty^2 \sum_{i=1,\dots,N} \left(\sum_{j=1,\dots,N} |v_j| \right)^2 \\ &\leq \|Q\|_\infty^2 N \left(\sum_{j=1,\dots,N} |v_j| \right)^2 \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\leq N\|Q\|_\infty^2 \left[\left(\sum_{j=1,\dots,N} v_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1,\dots,N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= N^2\|Q\|_\infty^2\|v\|_2^2, \end{aligned}$$

por lo que para cualquier $v \neq \bar{0}$,

$$\frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} \leq N\|Q\|_\infty,$$

y al ser $N\|Q\|_\infty$ independiente de $v \in \mathbb{R}^N$,

$$|Q| \leq N\|Q\|_\infty.$$

2. Sean $Q_1, Q_2 \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^N$, notemos que:

$$\|(Q_1 + Q_2)v\|_2 = \|Q_1v + Q_2v\|_2 \leq \|Q_1v\|_2 + \|Q_2v\|_2,$$

y usando (A.1),

$$\leq |Q_1|\|v\|_2 + |Q_2|\|v\|_2 = (|Q_1| + |Q_2|)\|v\|_2,$$

por lo que, para cualquier $v \neq \bar{0}$,

$$\frac{\|(Q_1 + Q_2)v\|_2}{\|v\|_2} \leq |Q_1| + |Q_2|,$$

donde la última cantidad es independiente de $v \in \mathbb{R}^N$, así que tomando supremo,

$$|Q_1 + Q_2| \leq |Q_1| + |Q_2|.$$

Finalmente, usando sucesivamente (A.1),

$$\|Q_1Q_2v\|_2 = \|Q_1(Q_2v)\|_2 \leq |Q_1|\|Q_2v\|_2 \leq |Q_1||Q_2|\|v\|_2,$$

y de nuevo, para $v \neq \bar{0}$,

$$\frac{\|Q_1Q_2v\|_2}{\|v\|_2} \leq |Q_1||Q_2|,$$

por lo que tomando supremos obtenemos

$$|Q_1Q_2| \leq |Q_1||Q_2|.$$

■

Corolario A.3. $|\cdot|$ es una norma sobre $M_{N \times N}(\mathbb{R})$, y es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. 1. Supongamos que $|Q| = 0$, es decir,

$$\sup_{v \neq \bar{0}} \frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} = 0.$$

Entonces para los vectores canónicos e_j , $j \in \{1, \dots, N\}$, ocurre que

$$\|Qe_j\| = 0,$$

lo cual indica que la matriz envía a los vectores canónicos al vector $\bar{0}$, es decir, debe ser la matriz de ceros.

2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumple que:

$$|\lambda Q| = \sup_{v \neq \bar{0}} \frac{\|(\lambda Q)v\|_2}{\|v\|_2} = |\lambda| \sup_{v \neq \bar{0}} \frac{\|Qv\|_2}{\|v\|_2} = |\lambda| |Q|.$$

3. La desigualdad del triángulo y la equivalencia de las normas es el segundo y primer número, respectivamente, del teorema A.2. ■

Vamos ahora a probar que el análogo a la expansión en serie de Taylor de un número de la forma $e^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{k!}$, para $q \in \mathbb{C}$, es válida para una matriz $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ componente a componente.

Notación: Dada una matriz $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$, escribiremos $Q^0 = Id$, donde $Id = \{\delta_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, N\}$ es la matriz identidad.

Teorema A.4. Sea $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$ converge componente a componente.

Demostración. Para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, denotemos a la n -ésima suma parcial como $E(n) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^k}{k!}$. Ahora, sabemos por definición de la exponencial que

$$e^{|Q|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|Q|^k}{k!},$$

y la serie está bien definida ya que $|Q| \in [0, \infty)$. Por lo tanto la sucesión de sumas parciales

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{|Q|^k}{k!} \right)_{n \geq 0}$$

es de Cauchy.

Con lo anterior a la mano, notemos que para $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ y $n \geq m \geq 0$:

$$\begin{aligned} |(E(n) - E(m))_{ij}| &\leq \|E(n) - E(m)\|_\infty \\ &\leq |E(n) - E(m)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{Q^k}{k!} - \sum_{k=0}^m \frac{Q^k}{k!} \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{Q^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|Q|^k}{k!} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donde se han usado las propiedades demostradas en el teorema A.2 y que la sucesión de sumas parciales de la serie de Taylor de $e^{|Q|}$ es una sucesión de Cauchy.

Así, concluimos que para cualquier $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |(E(n) - E(m))_{ij}| = 0,$$

es decir, la sucesión de las componentes de las sumas parciales $((E(n))_{ij})_{n \geq 0}$ es de Cauchy. Por lo tanto la sucesión de sumas parciales de matrices converge componente a componente, y así la matriz expresada por la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$$

está bien definida. ■

Dado el resultado anterior, podemos definir la exponencial de una matriz como sigue:

Definición A.5. Sea $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$. Definimos la exponencial de Q como la matriz

$$e^Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}.$$

Con el teorema y la definición demostramos dos consecuencias:

Corolario A.6. Para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, N\}$ y $t \in \mathbb{R}$, la serie de potencias

$$(e^{tQ})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((tQ)^k)_{ij}}{k!}$$

tiene radio de convergencia infinito.

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \dots, N\}$ y $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que $tQ \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$, así que la matriz e^{tQ} está bien definida como la serie mencionada en A.5, la cuál converge componente a componente. En particular lo hace para la componente ij . ■

Corolario A.7. Sean $Q_1, Q_2 \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ dos matrices que conmutan. Entonces

$$e^{Q_1+Q_2} = e^{Q_1}e^{Q_2}.$$

Demostración. Calculando directamente de la definición y usando la fórmula del binomio (lo cual es posible gracias a que las matrices conmutan) tenemos:

$$\begin{aligned} e^{Q_1+Q_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q_1 + Q_2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} Q_1^m Q_2^{k-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{Q_1^m Q_2^{k-m}}{m!(k-m)!}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que la suma converge con la norma $|Q|$, podemos usar el teorema de Fubini para cambiar las sumas, y al recorrer los índices,

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{Q_1^m Q_2^{k-m}}{m!(k-m)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_1^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_2^k}{k!} \\ &= e^{Q_1} e^{Q_2}, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Esta última propiedad se conoce como la *propiedad de semigrupo*, pues para una $Q \in M_{N \times N}$ y $s, t \in \mathbb{R}$, tenemos que las matrices sQ y tQ conmutan, y si denotamos por $P(t)$ y $P(s)$ a las matrices e^{tQ} y e^{sQ} respectivamente, obtenemos

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

Por último, agregamos un par de resultados que nos ayudan a calcular las exponenciales de una matriz cuando esta última es diagonalizable. El primero de ellos nos dice qué forma toma la exponencial de una matriz cuando esta es diagonal:

Teorema A.8. Sea $D \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. Entonces para $i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$(e^D)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ e^{D_{ii}} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que una matriz diagonal cumple que para cualesquiera índices $i, j \in \{1, \dots, N\}$ y cualquier potencia $n \geq 0$, si $i \neq j$ entonces $(D^n)_{ij} = (D_{ij})^n = 0$, mientras que en la diagonal se cumple que $(D^n)_{ii} = (D_{ii})^n$. Así, por definición de la exponencial de una matriz, para $i, j \in \{1, \dots, N\}$, si $i \neq j$,

$$(e^D)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n)_{ij}}{n!} = 0,$$

mientras que para los elementos de la diagonal,

$$\begin{aligned} (e^D)_{ii} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n)_{ii}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_{ii})^n}{n!} \\ &= e^{D_{ii}}. \end{aligned}$$

■

Finalmente, el siguiente resultado nos dice que la exponencial de una matriz diagonalizable se puede obtener de forma relativamente sencilla. Este resultado resulta de gran utilidad en las aplicaciones, pues se pueden usar las herramientas computacionales para el cálculo.

Teorema A.9. *Sea $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ diagonalizable. Si Q es similar a la matriz diagonal D y P, P^{-1} son sus matrices de cambio de base, entonces*

$$e^Q = P^{-1}e^D P.$$

Demostración. Comenzamos recordando el siguiente resultado de álgebra lineal usando las matrices anteriores: para cualesquiera $k \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^k (P^{-1}DP)^n = \sum_{n=0}^k P^{-1}D^n P.$$

Con este resultado, notemos que para $i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} (e^Q)_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Q^n)_{ij}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((P^{-1}DP)^n)_{ij}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}D^n P)_{ij}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N (P^{-1})_{ik} (D^n)_{kl} P_{lj} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^N (P^{-1})_{ik} (D^n)_{kk} P_{kj}, \end{aligned}$$

y ahora intercambiando las sumas y usando el teorema A.8,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (P^{-1})_{ik} (D_{kk})^n P_{kj} \\
&= \sum_{k=0}^N (P^{-1})_{ik} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_{kk})^n}{n!} \right) P_{kj} \\
&= \sum_{k=0}^N (P^{-1})_{ik} e^{D_{kk}} P_{kj} \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N (P^{-1})_{ik} (e^D)_{kl} P_{lj} \\
&= (P^{-1} e^D P)_{ij}.
\end{aligned}$$

Así, las matrices coinciden componente a componente y por lo tanto son iguales. ■

Bibliografía

- [1] Berestycki, N. (2014). *Applied Probability, Part II*. University of Cambridge. Recuperado el 08 de febrero de 2021 de https://homepage.univie.ac.at/nathanael.berestycki/teach/AppliedProb/AP_notes.pdf
- [2] Durrett, R. (2016). *Essentials of Stochastic Processes*. (2.^a ed.) Switzerland: Springer International Publishing.
- [3] Grimmett, G. R. & Stirzaker, D. R. (2001). *Probability and Random Processes*. (3.^a ed.) Oxford: Oxford University Press.
- [4] Lawler, G. F. (2006). *Introduction to Stochastic Processes*. (2.^a ed.) Florida: Taylor & Francis Group.
- [5] Norris, J.R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Rincón, L. (2012). *Introducción a los Procesos Estocásticos*. México: Las Prensas de Ciencias.
- [7] Ross, M. H. & Pawlina, W. (2016). Capítulo 17 Sistema Digestivo II: esófago y tubo digestivo. En *Histología. Texto y atlas* (pp. 617-675). Barcelona, España: Wolters Kluwer.
- [8] Ross, S. M. (2010). *Introduction to Probability Models*. (10.^a ed.) Oxford: Elsevier.
- [9] Vanaja, K. G., Feinberg, A. P., & Levchenko, A. (2012). Chapter 11 Stem Cell Differentiation as a Renewal-Reward Process: Prediction and Validation in the Colonic Crypt. En I.I. Goryanin & A.B. Goryachev. (Ed.) *Advances in Systems Biology*. (pp. 199-209). New York: Springer.