UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

PANORAMA GENERAL DE LA INTEGRAL DE HENSTOCK

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA

SANDRA PALAU CALDERÓN

DIRECTOR DE TESINA

DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

MÉXICO, D.F. JULIO 2012

1. Introducción

A mediados del siglo XVII, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) empezaron a desarrollar el concepto de derivada. Al mismo tiempo Newton pensó el concepto de integral como el proceso inverso de la derivada, es decir, una función es integrable si tiene antiderivada. Tiempo después Augustin Louis Cauchy (1789-1857) concibió la definición de integral de manera constructiva, pero solamente para funciones continuas. Bernhard Riemann (1826-1866) desarrolló la idea de integral como actualmente se conoce y Gaston Darboux (1842-1917) la perfeccionó en 1875, sin embargo esta definición tiene varias restricciones, como por ejemplo sólo se pueden integrar funciones acotadas en intervalos acotados. Además no cumple con la idea original de Newton, ya que la integral de Riemann no la podemos ver como proceso inverso del proceso de derivación porque existen funciones cuyas derivadas no podemos integrar.
En 1902 al presentar su tesis doctoral, Henri Lebesgue (1875-1941) creó una nueva integral mucho más poderosa que la integral de Riemann ya que eliminaba muchas de las limitaciones de ésta y fácilmente se podía generalizar a espacios más abstractos, pero la construcción no era intuitiva y seguía sin resolver el problema de ser el proceso inverso de la derivación.

Para darle solución a este problema, paralelamente, en 1912, Arnaud Denjoy (1884-1974) y en 1914, Oskar Perron (1880-1975) desarrollaron una integral que tenía la ventaja de incluir a las funciones que son derivadas, pero la construcción era bastante complicada por lo que no tuvieron éxito. A finales de los años 50, Jaroslav Kurzweil (1926) y Ralph Henstock (1923-2007) independientemente, construyeron una integral que obligaba a la derivada de cualquier función a ser integrable, basándose en la construcción de Riemann pero con resultados más fuertes que los de la integral de Lebesgue. Tiempo después se demostró que las integrales de Denjoy, Perron, Kurzweil y Henstock son la misma. Debido a que la construcción de Henstock es la más sencilla y que uno de sus teoremas es fuertemente utilizado a lo largo de esta tesina, simplemente la llamaremos integral de Henstock.

En la primera sección se definen los conceptos de partición etiquetada y función calibradora. Se demuestra el Teorema de Cousin que nos garantiza que dada cualquier función calibradora siempre existe una partición etiquetada más fina, este teorema es consecuencia inmediata de la completez de los números reales. Se define la integral de Henstock de una función en un intervalo compacto y se dan propiedades básicas de la integral.
En la segunda sección se demuestra el importante lema de Saks-Henstock, este lema se utilizará para demostrar varias de las propiedades de la integral, como por ejemplo la integrabilidad de cualquier función que sea una derivada o el teorema de convergencia monótona. El lema garantiza que tienen el mismo grado de aproximación, la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock de una función respecto a una partición y la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock respecto a una subpartición (ver 16). De la misma manera y de forma aun más sorprendente se muestra que se puede reemplazar el valor absoluto de la diferencia por la diferencia de

los valores absolutos y el grado de aproximación sigue siendo básicamente el mismo.
En la siguiente sección se muestran las versiones correspondientes a los Teoremas fundamentales del Cálculo, se generalizan y se da una caracterización de cuando una función es Henstock integrable. A partir de esta caracterización se demuestra que todas las funciones Lebesgue integrables son Henstock integrables, además se exhibe una función cuya derivada es Henstock integrable pero no Lebesgue integrable. Para finalizar se demuestran las fórmulas de integración por partes y de sustitución.

En la tercera sección se muestra que la integral de Henstock no es absolutamente integrable, sin embargo se da una caracterización de las funciones absolutamente integrables y más adelante, utilizando el Teorema de Convergencia Dominada, se demuestra que éstas son precisamente las funciones Lebesgue integrables.
La siguiente sección está dedicada a la convergencia de funciones Henstock integrables, se estudia en qué casos el límite es Henstock integrable, se demuestran los Teorema de Convergencia Uniforme, Convergencia Monótona, el lema de Fatou y el Teorema de Convergencia Dominada. Además se demuestra el teorema de Gordon que caracteriza cuándo el límite de funciones integrables es una función Henstock integrable.
Finalmente se define la integral de una función en intervalos no acotados y se generalizan todas las propiedades anteriores.

Para una mejor comprensión del presente trabajo se recomienda estar familiarizado con teoría de la medida, en particular con la integral de Lebesgue, lo cual supondremos del lector.

2. Integral de Henstock

En esta sección definiremos la integral de Henstock a partir de funciones calibradoras y particiones etiquetadas de un intervalo. Esta construcción regresa a la idea de integral de Riemann.

Definición 1. *Dado $I = [a, b]$ un intervalo, definimos una* ***partición*** *de I como una colección finita de subintervalos no empalmados tales que $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. La denotamos por $P := \{I_i = [a_i, b_i] : i = 1, \cdots, n\}$. Una partición* ***etiquetada*** *es una partición $P = \{I_i : i = 1, \cdots, n\}$ y una colección de puntos t_i con $t_i \in I_i$. La denotamos por $\dot{P} := \{(I_i, t_i) : t_i \in I_i,\ i = 1, \cdots, n\}$.*

Definición 2. *Decimos que una función $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función* ***calibradora*** *de $[a, b]$.*

Definición 3. *Dada una función calibradora δ de $[a, b]$ decimos que una partición etiquetada $\dot{P} = \{(I_i, t_i) : t_i \in I_i,\ i = 1, \cdots, n\}$ esta* ***subordinada*** *a δ o es δ-**fina**, si $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para toda i. Lo denotamos por $\dot{P} << \delta$.*

El siguiente lema fue demostrado por Pierre Cousin (1867-1933) y utiliza la completez de los reales en el axioma de intervalos cerrados y anidados. Se puede realizar otra prueba utilizando la compacidad del intervalo.

Teorema 4 (de Cousin, 1895). *Dada δ una función calibradora de $[a,b]$ siempre existe una partición etiquetada subordinada a δ.*

Demostración. Supongamos que I no tiene una partición δ-fina.
Sea $c = \frac{a+b}{2}$ y partimos I en dos intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. Como I no tiene partición δ-fina entonces alguno de ellos no tiene partición δ-fina, llamemos $I_1 = [a_1, b_1]$ a ese intervalo.
A continuación definimos $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ y bisectamos I_1 en dos intervalos $[a_1, c_1]$ y $[c_1, b_1]$. Como I_1 no tiene partición δ-fina entonces alguno de ellos no tiene partición δ-fina, llamemos $I_2 = [a_2, b_2]$ a ese intervalo.
De esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos I_n con $I_{n+1} \subset I_n$ y cuyas longitudes tienden a cero. Por el teorema de encaje de intervalos cerrados y anidados existe un único punto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Como $\delta(x) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $l(I_n) = \frac{b-a}{2^n} < \delta(x)$ para toda $n \geq N$, entonces $I_p \subset [x - \delta(x), x + \delta(x)]$, por lo que (I_p, x) es una partición δ-fina de I_p lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 5. *Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y una partición etiquetada $\dot{P}$, definimos la **suma de Henstock de f respecto a $\dot{P}$** como $S(f;\dot{P}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(b_i - a_i)$.*

Definición 6. *Decimos que una función $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es **Henstock integrable** en I si existe un número real A tal que para toda $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ en I tal que si $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ es una partición etiquetada más fina que δ entonces*

$$|S(f;\dot{P}) - A| \leq \epsilon.$$

A la integral de f la denotamos por $\int_a^b f$ o $\int_I f$ y al conjunto de funciones Henstock integrables por $\mathcal{H}(I)$.

Observaciones El valor de A es único.
Si f es Riemann integrable en I entonces f es Henstock integrable, pues podemos tomar a δ constante como en la definición de integral de Riemann y el valor de las dos integrales es el mismo.
Cuando no haya confusión simplemente diremos que f es integrable.
El siguiente resultado caracteriza a las funciones integrables y es muy útil cuando queremos demostrar que una función es integrable pero no conocemos el valor de la integral.

Teorema 7 (Criterio de Cauchy). *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe una función calibradora η tal que para cualesquiera dos particiones etiquetadas η finas $\dot{P}$ y $\dot{Q}$, se tiene que*

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \epsilon.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Como $f \in \mathcal{H}(I)$ con integral L, dada $\epsilon > 0$ existe la función calibradora δ tal que si $\dot{P}$ es una partición etiquetada a δ entonces $|S(f;\dot{P}) - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\eta = \delta$ entonces

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < |S(f;\dot{P}) - L| + |L - S(f;\dot{Q})| < \epsilon.$$

$\Leftarrow$) Para toda $n \in \mathbb{N}$ elegimos δ_n tal que si $\dot{P}$ y $\dot{Q}$ son dos particiones etiquetadas a δ_n entonces $|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < 1/n$. Además sin perder generalidad podemos suponer que $\delta_n(t) \geq \delta_{n+1}(t)$ para toda $t \in I$.
Para cada n elegimos una partición $\dot{P}_n << \delta_n$. Sea $m > n$ como $\delta_n(t) > \delta_m(t)$ tenemos que $|S(f;\dot{P}_n) - S(f;\dot{P}_m)| < 1/n$, por lo cual la sucesión $\{S(f;\dot{P}_n)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.
Sea Ael límite, y para toda $n \in \mathbb{N}$ sea K $(\geq n)$ tal que $|S(f;\dot{P}_k) - A| < 1/n$ si $k \geq K$. Entonces si $\dot{Q} << \delta_K$ tenemos

$$|S(f;\dot{Q}) - A| \leq |S(f;\dot{Q}) - S(f;\dot{P}_K)| + |S(f;\dot{P}_K) - A| < \frac{2}{n}.$$

$\square$

Definición 8. *Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un* ***conjunto nulo*** *si para toda $\epsilon > 0$ existe una sucesión numerable de intervalos abiertos $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) < \epsilon.$$

Además decimos que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es ***nula*** *si $\{x : f(x) \neq 0\}$ es un conjunto nulo.*

El siguiente teorema y corolario nos muestra propiedades básicas de la integral de Henstock, la forma de demostrarlos es análoga a la usada en la integral de Riemann, por lo cual se deja al lector.

Teorema 9.

a) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función nula, entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ y $\int_I f = 0$.

b) Si f y g son integrables en I, entonces $f + g$ es integrable y $\int_I f + g = \int_I f + \int_I g$.

c) Si f es integrable y c es un real, entonces cf es integrable y $\int_I cf = c\int_I f$.

d) Si $f \in \mathcal{H}(I)$ y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in I$, entonces $\int_I f \geq 0$.

e) Si f, $g \in \mathcal{H}(I)$ y $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in I$, entonces $\int_I f \leq \int_I g$.

f) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces $f \in \mathcal{H}([a,b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{H}([a,c])$ y $f \in \mathcal{H}([c,b])$. En tal caso $\int_a^b f = \int_a^c f +_c \int^b f$.

g) Si $f \in \mathcal{H}(I)$ entonces, $f_r \in \mathcal{H}(I_r)$ y $\int_{I_r} f_r = \int_I f$.[1]

h) Además si $r \neq 0$ se tiene que $f_{(r)} \in \mathcal{H}(I_{(r)})$ y $\int_{I_{(r)}} f_{(r)} = r \int_I f$.[2]

Como corolario tenemos los siguientes resultados:

Corolario 10.

a) Si f es Henstock integrable en $I = [a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in I$ entonces $m(b-a) \leq \int_I f \leq M(b-a)$.

b) Si f y $|f|$ son integrables en I, entonces $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

c) Si $f \in \mathcal{H}([a, b])$ y $a = c_1 < \cdots < c_n = b$, entonces $\int_a^b f = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f$.

Observemos que en el inciso b) del corolario es **necesario** pedir la integrabilidad de $|f|$ como lo muestra el siguiente ejemplo. Por cierto esto es una diferencia fundamental con la integral de Riemann o Lebesgue, ya que en éstas si f es integrable queda garantizada la integrabilidad de $|f|$.

Ejemplo 11. *Sea $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie convergente en $\mathbb{R}$. Sea $c_k = 1 - 1/2^k$ para toda $k = 0, 1, \cdots$ Definimos la función $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:*

$$h(x) := \begin{cases} 2^k a_k & si \quad x \in [c_{k-1}, \ c_k), k \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Entonces $h \in \mathcal{H}(I)$ y $\int_I h = A$.
Sean $0 < \epsilon < 1$, $M = sup\{1, |a_k|; k \in \mathbb{N}\}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $m \geq N$ entonces

$$|a_m| < \epsilon \qquad y \qquad \left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq \epsilon.$$

Si $E = \{c_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, definimos la función calibradora $\delta : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} dist(t, E) & si \quad x \notin E \\ \\ \epsilon / 4^{k+1} M & si \quad x = c_k, \ k \in \mathbb{N} \\ \\ 1/2^N & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Entonces si $\dot{P} << \delta$ se sigue que $|S(h, \dot{P}) - A| < \epsilon$.
Por lo anterior si $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ se tiene que $h \in \mathcal{H}(I)$, pero $|h| \notin \mathcal{H}(I)$ como lo veremos más adelante.

[1]Dado $r \in \mathbb{R}$, definimos las r-traslaciones de I y de f como $I_r = [a + r, b + r]$ y $f_r(x) = f(y - r)$.
[2]Dada $r \neq 0$ definimos las r- multiplicaciones como $f_{(r)}(x) = f(x/r)$, Si $r > 0$, $I_{(r)} = [ra, rb]$ y si $r < 0$, $I_{(r)} = [rb, ra]$.

Teorema 12 (del Pinchamiento). *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existen $\psi,\ \varphi \in \mathcal{H}(I)$ tales que*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad y \quad \int_I (\psi - \varphi) \leq \epsilon.$$

Demostración.

⇒) Si $f \in \mathcal{H}(I)$, sean $\varphi = \psi = f$.

⇐) Sea $\epsilon > 0$ y $\varphi,\ \psi \in \mathcal{H}(I)$ tales que $\varphi \leq f \leq \psi$. Notemos que para cualquier partición etiquetada se cumple que $S(\varphi; \dot{P}) \leq S(f; \dot{P}) \leq S(\psi; \dot{P})$.
Sea δ una función calibradora tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces

$$\left| S(\varphi; \dot{P}) - \int_I \varphi \right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left| S(\psi; \dot{P}) - \int_I \psi \right| < \epsilon.$$

Así pues

$$\int_I \varphi - \epsilon \leq S(\varphi; \dot{P}) \leq S(f; \dot{P}) \leq S(\psi; \dot{P}) \leq \int_I \psi + \epsilon$$

por lo cual para $\dot{P},\ \dot{Q} << \delta$ se tiene que

$$|S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q})| \leq \int_I (\psi - \varphi) + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, $f \in \mathcal{H}(I)$.

□

Definición 13. *Decimos que $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es **escalonada** si existen una partición $a = c_0 < .. < c_n = b$ tales que $s(x) = \alpha_i$ si $x \in (c_{i-1}, c_i)$.*

Es fácil demostrar que si $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada, entonces s es integrable y $\int_I s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (c_i - c_{i-1})$.

3. Lema de Saks-Henstock.

El lema de Saks-Henstock es importante porque ayuda a demostrar propiedades fuertes de la integral. El lema garantiza que tienen el mismo grado de aproximación, la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock de una función respecto a una partición y la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock respecto a una subpartición.
Como corolario del lema se muestra, de forma sorprendente, que se puede reemplazar el valor absoluto de la diferencia por la diferencia de los valores absolutos y el grado de aproximación sigue siendo básicamente el mismo.

Definición 14. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo,*

*a) Una **subpartición**, $P_0 = \{J_j\}_{j=1}^s$, es una colección de intervalos cerrados no empalmados de I. Una **subpartición etiquetada** es una subpartición $P_0 = \{J_j\}_{j=1}^s$ y una colección de puntos t_j tales que $t_j \in J_j$. La denotamos por $\dot{P}_0 = \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^s$.*

*b) Si δ es una función calibradora en I decimos que una subpartición etiquetada $\dot{P}_0$ es **δ-fina** si $J_j \in [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ para toda j. Además si $E \subset I$ y $t_j \in E$ para toda j decimos que es una subpartición $(\delta, E)-$**fina**.*

Definición 15. *Si $\dot{P}_0 = \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^s$ es una subpartición etiquetada de I definimos $U(\dot{P}_0) = \bigcup_{j=1}^{s} J_j$. Si además $f \in \mathcal{H}(I)$ definimos $S(f, \dot{P}_0) = \sum_{j=1}^{s} f(t_i) l(J_j)$, donde $l(J)$ es la longitud del intervalo y $\int_{U(\dot{P}_0)} f = \sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f$.*

Teorema 16 (**Lema de Saks-Henstock**)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(I)$, para $\epsilon > 0$ sea δ una función calibradora tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces $|S(f, \dot{P}) - \int_I f| < \epsilon$.*
Si $\dot{P}_0 = \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^s$ es una subpartición δ-fina se cumple que:

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \left(f(t_j) l(J_j) - \int_{J_j} f \right) \right| = \left| S(f, \dot{P}_o) - \int_{U(\dot{P}_0)} f \right| \leq \epsilon.$$

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y $K_1, ..K_m$ subintervalos cerrados tales que $\{J_j\} \bigcup \{K_m\}$ es partición de I.
Como $f \in \mathcal{H}(K_k)$, existe δ_k función calibradora tal que $|S(f, \dot{Q}_k) - \int_{K_k} f| < \alpha/m$, si $\dot{Q}_k << \delta_k$, además podemos suponer que $\delta_k(x) \leq \delta(x)$ si $x \in K_k$.
Sea $\dot{P}^* = \dot{P}_0 \cup \dot{Q}_1 \cup \cdots \cup \dot{Q}_m$, entonces $\dot{P}^* << \delta$ y

$$\left| S(f, \dot{P}_0) - \int_{U(\dot{P}_0)} f \right| \leq \left| S(f, \dot{P}^*) - \int_I f \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| S(f, \dot{Q}_k) - \int_{K_k} f \right| < \epsilon + \alpha$$

Como $\alpha > 0$ es arbitraria, tenemos que $\left| S(f, \dot{P}_0) - \int_{U(\dot{P}_0)} f \right| \leq \epsilon$. □

Con las hipótesis del lema de Saks-Henstock tenemos las siguientes desigualdades que se utilizarán más adelante.

Corolario 17.

i) $\sum_{j=1}^{s} |f(t_j) l(J_j) - \int_{J_j} f| \leq 2\epsilon$.

ii) $\left| \sum_{j=1}^{s} |f(t_j)| l(J_j) - \sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} |f| \right| \leq 2\epsilon$.

Demostración. Sea $\dot{P}_0^+$ el conjunto de intervalos tales $f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \geq 0$ y sea $\dot{P}_0^-$ el conjunto para los cuales el término correspondiente es negativo. Aplicando el teorema anterior obtenemos las siguientes desigualdades

$$\sum_{j\in P_0^+} \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| = \sum_{j\in P_0^+} \left(f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right) = \left| \sum_{j\in P_0^+} \left(f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right) \right| \leq \epsilon$$

$$\sum_{j\in P_0^-} \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| = -\sum_{j\in P_0^-} \left(f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right) = \left| \sum_{j\in P_0^-} \left(f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right) \right| \leq \epsilon$$

Sumándolas obtenemos el primer inciso. El segundo inciso se obtiene de aplicar el primero y la desigualdad del triángulo. □

4. Teoremas fundamentales.

En esta sección mostraremos las versiones correspondientes a los Teoremas Fundamentales del Cálculo, además generalizaremos estas versiones, y daremos una caracterización de cuando una función F es integral indefinida de f.

Definición 18. *Sea $I = [a, b]$ y $F,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*a) Decimos que F es una **primitiva** de f si existe la derivada de F y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$.*

*b) Decimos que F es una n-**primitiva** (respectivamente, c-**primitiva** o f-**primitiva**) si F es continua en I y existe un conjunto nulo E (respectivamente, contable o finito) tal que si $x \notin E$ entonces $F'(x)$ existe y es igual a $f(x)$. Al conjunto E lo llamaremos **conjunto excepcional**.*

*c) Si $f \in \mathcal{H}(I)$ y $u \in I$ definimos $F_u(x) := \int_u^x f$ como la **integral indefinida con base en** u. Decimos que F es una **integral indefinida de** f si F difiere de F_u por una constante.*

Al igual que en la integral de Lebesgue, tenemos la continuidad de la integral.

Teorema 19. *Sea $f \in \mathcal{H}([a, b])$. Entonces $F(x) = \int_a^x f$ es continua en $[a, b]$*

Demostración. Sea $c \in [a, b)$, demostraremos que F es continua por la derecha en c. Dada $\epsilon > 0$ y δ una función calibradora del lema de Saks-Henstock, definimos

$$\delta'(t) := \begin{cases} \min\{\delta(t), \frac{1}{2}|t-c|\} & \text{si} \quad t \neq c \\ \min\{\delta(c), \frac{\epsilon}{|f(c)|+1}\} & \text{si} \quad t = c \end{cases}$$

Observemos que definir así a δ' obliga que c sea etiqueta.
Si $0 < h < \delta'(c)$ entonces $\dot{P}_o = \{[c, c+h], c\} << \delta'$ es una subpartición que por el lema 16 cumple que $|f(c)h - \int_c^{c+h} f| \leq \epsilon$. Entonces

$$|F(c+h) - F(c)| = |\int_c^{c+h} f| \leq \epsilon + |f(c)|h < 2\epsilon.$$

Análogamente se cumple la continuidad por la izquierda. $\square$

Teorema 20. *Sea $f \in \mathcal{H}(I)$, tal que $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = A$ en el punto $c \in [a, b)$, entonces $F(x) := \int_a^x f$ tiene derivada lateral derecha y $D^+(F)(c) = A$.*

Demostración. Sea $\eta > 0$ tal que si $0 < x < \eta$ entonces $|f(c+x) - A| < \epsilon$. Dada $h \leq \eta$ tenemos que $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} h - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$.
Además para toda $x \in (c, c+h]$ se tiene que $A - \epsilon \leq f(x) \leq A + \epsilon$, por lo cual $(A - \epsilon)h \leq \int_c^{c+h} f(x) \leq (A + \epsilon)h$ de donde se sigue el teorema. $\square$

De la misma manera tenemos un teorema para el límite por la izquierda. Además como corolario obtenemos la versión correspondiente al primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Corolario 21. *Si $f \in \mathcal{H}(I)$ y es continua en c, entonces F, la integral indefinida de f es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Teorema 22 (**de diferenciación.**)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(I)$ y F una integral indefinida de f. Existe un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que si $x \in I - Z$ entonces F' existe y es igual a f. Es decir, F es una n-primitiva de f.*

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f$ y denotemos por E al conjunto de puntos donde no existe la derivada lateral derecha de F ó si existe es distinta del valor de f. Vamos a demostrar que E es un nulo.
Negando la definición de derivada lateral tenemos que para $x \in E$ existe $\alpha(x) > 0$ tal que si $s > 0$ entonces existe $y_{x,s} \in I$, con $x < y_{x,s} < x + s$ y la propiedad $\left|\frac{F(y_{x,s}) - F(x)}{y_{x,s} - x} - f(x)\right| > \alpha(x)$. Es decir, $|F(y_{x,s}) - F(x) - f(x)(y_{x,s} - x)| > \alpha(x)(y_{x,s} - x)$.
Dada $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := \{x \in E : \alpha(x) \leq 1/n\}$. Basta demostrar que E_n es un conjunto nulo. Como $f \in \mathcal{H}(I)$, para $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces $|S(f, \dot{P}) - \int_I f| < \epsilon/n$.
Sea $\mathcal{F}_n = \{[x, y_{x,s}] : x \in E_n,\ 0 < s \leq \delta(x)\}$, entonces $\mathcal{F}_n$ es una cubierta de Vitali para E_n y por el Teorema de Vitali[3] existen $I_1 = [x_1, y_1], \cdots, I_p = [x_p, y_p] \in \mathcal{F}_n$ ajenos y una sucesión $\{J_i\}_{i=p+1}^{\infty}$ de intervalos cerrados tales que

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) \leq \epsilon.$$

[3]Para una demostración de este teorema se puede revisar [10]

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\left|f(x_i)(y_i-x_i)-\int_{x_i}^{y_i} f\right| &= \sum_{i=1}^{p}|f(x_i)(y_i-x_i)-(F(y_i)-F(x_i))| \geq \sum_{i=1}^{p}\alpha(x_i)(y_i-x_i)\\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(y_i-x_i).\end{aligned}$$

Usando el lema de Saks-Henstock, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{p} y_i - x_i \leq n\sum_{i=1}^{p}\left|f(x_i)(y_i-x_i)-\int_{x_i}^{y_i} f\right| < \epsilon.$$

Por lo tanto $\sum\limits_{i=1}^{p} l(I_i) + \sum\limits_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) \leq \epsilon.$ □

Para finalizar con el Primer Teorema Fundamental, daremos una condición suficiente y necesaria para que una función G sea una integral indefinida de una función Henstock integrable. Para lo cual necesitamos la siguiente definición.

Definición 23. *Decimos que una función $F : I \to \mathbb{R}$ tiene **variación insignificante** en $E \subset I$ si para toda $\epsilon > 0$ existe una función $\delta : E \to \mathbb{R}^+$ tal que si $\dot{P}_0 = \{([u_j, v_j], t_j\}_{j=1}^{s}$ es una (δ, E) subpartición de I entonces $\sum\limits_{j=1}^{s}|F(v_j) - F(u_j)| < \epsilon$. Además lo denotamos por $F \in NV_I(E)$.*

Observación. Si $F \in NV_i(E)$ entonces F es continua en E. El recíproco es válido si el conjunto E es numerable, pero no lo es para conjuntos nulos, por ejemplo la función de Cantor[4] es continua en el conjunto de Cantor pero no tiene variación insignificante. Sin embargo si f es absolutamente continua[5] en I y $Z \subset I$ es un nulo, entonces $f \in NV_I(Z)$.

Lema 24. *Sea F una función diferenciable en $t \in I$. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta(t) > 0$ tal que si $u,\ v \in I$ cumplen $t - \delta(t) \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta(t)$, entonces*

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u)| \leq \epsilon(v-u).$$

Demostración. Se sigue de la definición de diferenciabilidad y la desigualdad del triángulo. □

Teorema 25 (Caracterización.). *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es Henstock integrable si y sólo si existe una función $G : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que $G \in NV_I(Z)$ y $G'(x) = f(x)$ si $x \in I - Z$. Además $\int_a^x f = G(x) - G(a)$ para toda $x \in I$.*

Demostración.

[4]Para la construcción de la función de Cantor se puede revisar [1] o [3]

[5]La definición de absolutamente continua se puede encontrar en [10]

$\Rightarrow$) Sean $f \in \mathcal{H}(I)$ y $G(x) = \int_a^x f$. Por el teorema de diferenciación, existe un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que $G'(x) = f(x)$ si $x \notin Z$. Veamos que $G \in NV_I(Z)$, para ello definimos $f_1(x) = f(x)\chi_{I-Z}$, entonces $f_1 \in \mathcal{H}(I)$ y $G(x) = \int_a^x f_1$.
Por la integrabilidad de f_1, dada $\epsilon > 0$ existe una función calibradora η tal que si $\dot{P} << \eta$ entonces $|\int_a^b f_1 - S(f_1, \dot{P})| < \epsilon$.
Por el lema de Saks-Henstock, si $P_0 = \{([u_j, v_j], t_j)\}_{j=1}^s << (\eta, Z)$ entonces $\sum_{j=1}^{s} \left| f_1(t_j)(v_j - u_j) - \int_{u_j}^{v_j} f_1 \right| < 2\epsilon$. Como $f_1(t_j) = 0$ y $\int_{u_j}^{v_j} f_1 = G(v_j) - G(u_j)$ tenemos que $\sum_{j=1}^{s} |G(v_j) - G(u_j)| < 2\epsilon$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $G : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto nulo Z tal que $G \in NV_I(Z)$ y G es diferenciable en $I - Z$. Definimos $f(x) = G'(x)$ para $x \notin Z$ y $f(x) = 0$ si $x \in Z$. Veamos que $f \in \mathcal{H}(I)$ y G es una integral indefinida de f.
Sea $\epsilon > 0$, si $t \in Z$ elegimos $\delta : Z \longrightarrow (0, \infty)$ de la definición de variación insignificante. Si $x \notin Z$ escogemos una δ que cumpla el lema 24.
Si $\dot{P} = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^n << \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|G(b) - G(a) - S(f, \dot{P})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (G(v_i) - G(u_{i-1}) - f(t_i)(v_i - u_i)) \right| \\
&\leq \sum_{t_i \notin Z} |G(v_i) - G(u_i) - f(t_i)(v_i - u_i)| \\
&+ \sum_{t_i \in Z} |G(v_i) - G(u_i) - f(t_i)(v_i - u_i)| \\
&\leq \epsilon + \epsilon \sum_{t_i \in Z} (v_i - u_i) = \epsilon(b - a + 1).
\end{aligned}$$

El mismo argumento se aplica para demostrar que $G(x) - G(a) = \int_a^x f$.

$\square$

Observación. En el caso de la integral de Lebesgue si $f \in \mathcal{L}_1([a, b])$ se tiene que la integral indefinida $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es absolutamente continua en I[6] y por la observación anterior $G \in NV_I(Z)$ con $Z = \{x \in I : \text{ no existe } G'(x)\} \cup \{x \in I : G'(x) \neq f(x)\}$. Por lo cual $f \in \mathcal{H}(I)$. Así pues **toda función Lebesgue integrable es Henstock integrable** y las integrales son iguales.

El siguiente teorema es una versión mejorada del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y nos garantiza que la derivada de cualquier función F en un intervalo, **siempre** es Henstock integrable y la integral reconstruye a F a partir de su derivada. Este teorema es una diferencia notable con la integral de Lebesgue, para la cual necesitábamos una hipótesis adicional sobre la derivada (que fuera Lebesgue integrable).

[6] Para saber una caracterización de las funciones Lebesgue integrables se puede consultar [10].

Teorema 26. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ y $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definimos δ la función calibradora del lema 24. Para toda partición δ fina, $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|F(b) - F(a) - S(f, \dot{P})| &= \left| \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \epsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
&= \epsilon(b-a).
\end{aligned}$$

□

A continuación generalizaremos el teorema anterior a c-primitivas, y desarrollaremos un ejemplo que nos muestra que no se puede generalizar a n-primitivas.

Teorema 27. *Si F es una c-primitiva f en $I = [a,b]$, entonces $f \in \mathcal{H}(I)$, además $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Demostración. Sea $E = \{c_k\}_{k=1}^\infty$ el conjunto excepcional. Sin perder generalidad podemos suponer que $f(c_k) = 0$ para toda k. Sea $\epsilon > 0$, definimos la función calibradora δ como la $\delta(t)$ del lema 24 si $t \notin E$ y si $t = c_k$ definimos $\delta(c_k)$ a partir de la continuidad de F de tal modo que $|F(z) - F(c_k)| < \epsilon/2^{k+1}$ si $|z - c_k| < \delta(c_k)$.
Dada $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n << \delta$. Si c_k es la etiqueta del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces $|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| \leq \epsilon/2^k$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
|F(b) - F(a) - S(f, \dot{P})| &= \left| \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})) \right| \leq \\
&\leq \sum_{t_i \notin E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \\
&+ \sum_{t_i \in E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \\
&\leq \epsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) + \sum_{k=1}^\infty \epsilon/2^k = \epsilon(b - a + 1).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 28. *Sea $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de Cantor, entonces λ es continua, es diferenciable con $\lambda'(x) = 0$ en todos los puntos excepto en el conjunto de Cantor que es nulo. Por lo cual es una n-primitiva de la función constante 0, sin embargo*

$$\int_0^1 0 = 0 \neq 1 = \lambda(1) - \lambda(0).$$

Para finalizar esta sección daremos dos propiedades más que se derivan del teorema anterior.

Proposición 29 (**Integración por partes**). *Sean F, $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en I. Entonces $F'G \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si $FG' \in \mathcal{H}(I)$. Además*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F'G + \int_a^b FG'.$$

Demostración. El resultado se sigue de $(FG)' = F'G + G'F$ y $(FG)' \in \mathcal{H}(I)$. $\square$

Proposición 30 (**Sustitución**). *Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $I = [a,b]$ y F una función diferenciable en el intervalo $\varphi(I)$. Si $f(x) = F'(x)$ para toda $x \in \varphi(I)$ entonces*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena $(F \circ \varphi)'(x) = (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)$ para toda $x \in I$. Por el teorema anterior obtenemos que

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = F \circ \varphi\Big|_a^b = F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

$\square$

5. Caracterización de las funciones absolutamente integrables.

En esta sección se da una caracterización de las funciones absolutamente integrables además se muestra que la integral de Henstock no es una integral absoluta.

Notación. Denotaremos $|\mathcal{H}|(I) := \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} : |f| \in \mathcal{H}(I)\}$.

El siguiente ejemplo nos muestra que no toda función integrable es absolutamente integrable.

Ejemplo 31. *Sea $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) := \begin{cases} x cos(\frac{\pi}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Entonces si ponemos $f(x) = F'(x) = cos(\frac{\pi}{x}) + \frac{\pi}{x} sen(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, tenemos por el teorema 27 que $f \in \mathcal{H}(I)$. Veamos que $f \notin |\mathcal{H}|(I)$. Observemos que $|f|$ es continua en cualquier intervalo $[a,b]$ con $a \neq 0$, por lo tanto integrable ahí. Sean $a_k = \frac{2}{2k+1}$ y

$b_k = \frac{1}{k}$ *con* $k \in \mathbb{N}$*, entonces* $F(a_k) = 0$*,* $F(b_k) = \frac{(-1)^k}{k}$ *y* $0 < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < 1$*. Si* $f \in |\mathcal{H}|(I)$ *tendríamos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f \right| \leq \int_0^1 |f| \qquad \textit{para toda } \ n.$$

Como la serie armónica es divergente, $f \notin |\mathcal{H}|(I)$*.*

El ejemplo anterior corresponde al de una función **Henstock integrable pero no Lebesgue integrable**, ya que las funciones Lebesgue integrable son absolutamente integrables.
Para saber si una función es absolutamente integrable, necesitamos verificar que la integral indefinida sea una función de variación acotada.[7]

Teorema 32 (**Caracterización**)**.** *Sea* $f \in \mathcal{H}(I)$*. Entonces* $f \in |\mathcal{H}|(I)$ *si y sólo si la integral indefinida* $F(x) = \int_a^x f$ *tiene variación acotada en* I*. En cuyo caso, tenemos que* $\int_I |f| = Var(F, I)$*.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $f \in |\mathcal{H}|(I)$, dada cualquier partición $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de I tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| = \int_a^b |f|$$

por lo cual $Var(F, I) \leq \int_a^b |f| < \infty$.

$\Leftarrow$) Como $F \in BV(I)$, dada $\epsilon > 0$ existe una partición $Q = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tal que $\left| Var(F, I) - \sum\limits_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \right| < \epsilon$. Además si P es una partición más fina que Q, lo anterior se sigue cumpliendo.
Sea $\delta : I \to \mathbb{R}^+$ una función tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces $| \int_a^b f - S(f, \dot{P})| < \epsilon$. Por el Lema de Saks-Henstock y el corolario 17, si $\dot{P}_0 = \{(I_i, t_i)\}_{j=1}^{m} << \delta$ es una subpartición de I se cumple que $\left| \sum\limits_{j=1}^{m} |f(t_j)| l(J_j) - \sum\limits_{j=1}^{m} \left| \int_{J_j} f \right| \right| \leq 2\epsilon$.
Definimos la función $\delta^*(x) = min\{\delta(x), \frac{1}{2}\ d(x, Q \setminus \{x\})\}$.
Si $\dot{P} = \{(J_j = [y_j, y_{j-1}], t_j)\}_{j=1}^{m} << \delta^*$, entonces los puntos de Q son etiquetas de $\dot{P}$, por lo que sin perder generalidad podemos suponer que $\{x_0, \cdots, x_n\}$ forman parte de las partición $\dot{P}$. Como $|F(v) - F(u)| = | \int_u^v f|$ tenemos que

$$\begin{aligned} |S(|f|, P) - Var(F, I)| &\leq \left| \sum_{j=1}^{m} |f(t_j)| l(J_j) - \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{J_j} f \right| \right| \\ &+ \left| \sum_{j=1}^{m} |F(y_j) - F(y_{j-1})| - Var(F, I) \right| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

[7]La definición de una función con variación acotada la podemos encontrar en el libro [10].

$\square$

Para finalizar esta sección damos un teorema de comparación, que se utilizará en la siguiente sección.

Corolario 33 (**Comparación**). *Sean $f,\ g \in \mathcal{H}(I)$ funciones tales que $|f| \leq g$. Entonces $f \in |\mathcal{H}|(I)$ y $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \leq \int_I g$.*

Demostración. Sean $F(x) = \int_a^x f$ y $u,\ v \in I$ entonces $|F(v) - F(u)| = \left|\int_u^v f\right| \leq \int_u^v g$. Dada una partición $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g = \int_a^b g.$$

De esta manera F tiene variación acotada por lo que $f \in |\mathcal{H}|(I)$. La desigualdades se cumplen de las propiedades básicas de la integral. $\square$

6. Teoremas de convergencia.

En esta sección veremos resultados que garantizan que el límite de una sucesión de funciones es integrable y cual es el valor de su integral. El primer resultado es cuando la convergencia es uniforme.

Definición 34. *Decimos que una sucesión de funciones $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente a una función f si para toda $\epsilon > 0$ existe $K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in I$.*

Teorema 35 (**de la convergencia uniforme**). *Si $(f_n) \subset \mathcal{H}(I)$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a f en $I = [a, b]$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ y además $\int_I f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ la de la convergencia uniforme. Entonces si $n, m \geq K$ se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| < 2\epsilon$ para toda $x \in I$, por lo que $\left|\int_I f_n - \int_I f_m\right| < 2\epsilon(b-a)$. Así pues, la sucesión $(\int_I f_n)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y converge a un número A.
Escogemos $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ entonces $|\int_I f_n - A| < \epsilon$. Sea $N = \text{máx}\{K, M\}$ y δ una función calibradora tal que $|\int_I f_N - S(f_N, \dot{P})| < \epsilon$ si $\dot{P} << \delta$. Entonces para toda partición $\dot{P} << \delta$ tenemos que

$$\left|S(f, \dot{P}) - A\right| \leq \left|S(f, \dot{P}) - S(f_N, \dot{P})\right| + \left|\int_I f_N - S(f_N, \dot{P})\right| + \left|\int_I f_N - A\right| < \epsilon(2 + b - a).$$

$\square$

El siguiente resultado es una generalización de un importante teorema para la integral de Lebesgue, probado en 1906 por el matemático Beppo Levi. Para su demostración se hace uso del lema de Saks-Henstock.

Teorema 36 (de la Convergencia Monótona). *Sea (f_n) una sucesión monótona de funciones en $\mathcal{H}(I)$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si la sucesión $(\int_I f_n)$ está acotada en $\mathbb{R}$. En cuyo caso se tiene que $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.*

Demostración. Supongamos que la sucesión es no decreciente, ya que la demostración para no creciente es análoga, considerando $(-f_n)$ en vez de (f_n).

$\Rightarrow$) Si $f \in \mathcal{H}(I)$ tenemos que $f_1(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$, entonces la sucesión $\left(\int_I f_n\right)$ está acotada ya que $\int_I f_1 \leq \int_I f_n \leq \int_I f$.

$\Leftarrow$) Sea $A = \sup\{\int_I f_n\}$, entonces $\int_I f_n \uparrow A$. Dada $\epsilon > 0$ elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq A - \int_I f_N < \epsilon$ y $\frac{1}{2^{N-2}} < \epsilon$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función calibradora δ_n tal que para toda partición etiquetada $\dot{P} << \delta_n$ se tiene que $|\int_I f_n - S(f_n, \dot{P})| < \frac{1}{2^n}$.
Además, como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para toda $x \in I$, existe $k(x)$ $(\geq N)$ tal que $0 \leq f(x) - f_{k(x)}(x) < \epsilon$. Definimos la función $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\delta(x) := \delta_{k(x)}(x)$.
Sea $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^m << \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\left|S(f,\dot{P}) - A\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^m f(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^n f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i)\right| \\ &+ \left|\sum_{i=1}^m f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f_{k(t_i)}\right| + \left|\sum_{i=1}^m \int_{I_i} f_{k(t_i)} - A\right|.\end{aligned}$$

i) El primer término está dominado por

$$\sum_{i=1}^m |f(t_i) - f_{k(t_i)}(t_i)| l(I_i) < \epsilon(b-a).$$

ii) El segundo término está dominado por

$$\sum_{i=1}^m \left| f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f_{k(t_i)}\right|$$

Como $k(t) \geq r$ para toda $t \in I$, entonces $s = \max\{k(t_1), \cdots k(t_n)\} \geq r$. Notemos que la suma corresponde a primero sumar sobre los $k(t_i) = p$ y luego sobre $p = r, \cdots s$. Para cada p, los correspondientes subintervalos I_i están contenidos en el intervalo con centro en t_i y radio $\delta(t_i) = \delta_{k(t_i)}(t_i) = \delta_p(t_i)$, entonces $\{(I_i, t_i) : k(t_i) = p\}$ es una subpartición δ_p fina. Por el lema de Saks-Henstock tenemos que

$$\sum_{k(t_i)=p} \left| f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f_{k(t_i)}\right| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

Así pues, el segundo término está acotado por

$$\sum_{p=r}^s \frac{1}{2^{p-1}} \leq \sum_{p=r}^\infty \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{r-2}} < \epsilon.$$

iii) Como la sucesión es no decreciente, para cada $k(t_i)$, tenemos que

$$\int_{I_i} f_r \leq \int_{I_i} f_{k(t_i)} \leq \int_{I_i} f_s.$$

Entonces

$$\int_I f_r = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_r \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_{k(t_i)} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_s = \int_I f_s.$$

por lo cual

$$A - \epsilon \leq \int_I f_r = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_{k(t_i)} \leq \int_I f_s \leq A.$$

Así pues, el tercer término es menor que ϵ.

Por lo tanto $|S(f, \dot{P}) - A| \leq \epsilon(2 + b - a)$. □

El Teorema de la Convergencia Monótona es muy importante y se usará aquí para demostrar el lema de Fatou para la integral de Henstock el cual es útil cuando no tenemos una sucesión monótona. Este lema fue probado originalmente en 1906 por Pierre Fatou para la integral de Lebesgue.

Lema 37. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(I)$ y $\alpha \in \mathcal{H}(I)$ son tales que $\alpha(x) \leq f_n(x)$ para toda $x \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que* $\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{H}(I)$.

Demostración. Como cada f_n está acotada por debajo por α, $\inf\{f_n\}$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_n = min\{f_1, \cdots, f_n\}$, entonces $\varphi_n \in \mathcal{H}(I)$ y es una sucesión no creciente que cumple que $\int_I \alpha \leq \int_I \varphi_n \leq \int_I f_1$. Por el Teorema de la Convergencia Monótona tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{H}(I)$. □

Lema 38 (de Fatou). *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(I)$ y $\alpha \in \mathcal{H}(I)$ como en el lema anterior, supongamos que $\liminf_{n\to\infty} \int_I f_n < \infty$, entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{H}(I)$ y además*

$$-\infty < \int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Demostración. Sea $\varphi_n = inf\{f_m : m \geq n\}$, entonces $\varphi_n \in \mathcal{H}(I)$ ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq \varphi_n \leq f_n$ y además $\int_a^b \alpha \leq \int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b f_n$.
Como la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente, $\{\int_a^b \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y (φ_n) converge a $\liminf_{n\to\infty} f_n$, entonces por el teorema de Convergencia Monótona tenemos que $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{H}(I)$ y

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

□

Dejamos al lector la demostración de la parte correspondiente al lema de Fatou para límite superior, a saber:

Lema 39. *Sean* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\omega \in \mathcal{H}(I)$ *como en el lema 37 tales que* $\limsup_{n\to\infty} \int_I f_n > -\infty$. *Entonces* $\limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{H}(I)$ *y además*

$$-\infty < \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n \leq \int_I \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

El teorema de la Convergencia Dominada para la integral de Lebesgue fue probado en 1908 por Lebesgue.
El siguiente resultado es el correspondiente para la integral de Henstock. De él se sigue la convergencia en media para una sucesión.

Teorema 40 (**Convergencia Dominada**). *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones integrables y* $\alpha, \omega \in \mathcal{H}(I)$ *tales que* $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)$ *para toda* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *entonces* $f \in \mathcal{H}(I)$ *y* $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Demostración. Como $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$ y $\int_a^b \alpha(x) \leq \int_a^b f_n(x) \leq \int_a^b \omega(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\int_I f = \int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n \leq \int_I \limsup_{n\to\infty} f_n = \int_I f.$$

□

Teorema 41 (**Convergencia en media**). *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones integrables y* $\alpha, \omega \in \mathcal{H}(I)$ *tales que* $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)$ *para toda* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *entonces* $|f - f_n| \in \mathcal{H}(I)$ *y* $\lim_{n\to\infty} \int_I |f - f_n| = 0$.

Demostración. Por el teorema de la Convergencia Dominada tenemos que $f \in \mathcal{H}(I)$, además $-(\omega - \alpha) \leq f - f_n \leq \omega - \alpha$. Entonces por el teorema de comparación,para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|f - f_n| \in \mathcal{H}(I)$. El resultado se sigue de aplicar el teorema anterior a $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{f}_n = |f - f_n|$ y $\tilde{\omega} = \omega - \alpha$. □

Como una aplicación importante de los teoremas anteriores, tenemos la **caracterización** de las funciones **Lebesgue** integrables como aquellas funciones **absolutamente Henstock** integrables.

Teorema 42. $\mathcal{L}(I) = \mathcal{H}(I) \cap |\mathcal{H}|(I)$.

Demostración.

⊆) Si $f \in \mathcal{L}(I)$, sabemos que $|f| \in \mathcal{L}(I) \subset \mathcal{H}(I)$. Por lo cual es cierta la primera contención.

⊇) Sea $f \in \mathcal{H}(I)$ absolutamente integrable y $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el truncamiento $f_n(x) = max\{min\{f(x), n\}, -n\}$. Por el teorema de Convergencia en media, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b |f - f_N| < \epsilon$. .

Sea $\eta = \frac{\epsilon}{2N}$ y $P_0 = \{[u_i, v_i] : i = 1, \cdots, k\}$ una subpartición con $\sum\limits_{i=1}^{k}(v_i - u_i) < \eta$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}|F(v_i) - F(u_i)| &= \sum_{i=1}^{k}\left|\int_{u_i}^{v_i} f\right| \leq \sum_{i=1}^{k}\int_{u_i}^{v_i}|f| \leq \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{u_i}^{v_i}|f - f_N| + \int_{u_i}^{v_i}|f_N|\right)\\ &\leq \int_a^b |f - f_N| + N\sum_{i=1}^{k}(v_i - u_i) < \epsilon.\end{aligned}$$

Así pues F es absolutamente continua y por lo tanto $f \in \mathcal{L}(I)$.

□

Definición 43. *Decimos que una colección de funciones integrables $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(I)$ es **equi-integrable** si para toda $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ tal que para toda partición $\dot{P} << \delta$ y toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\left|S(f, \dot{P}) - \int_I f\right| \leq \epsilon$.*

El siguiente teorema creado por Russell A. Gordon en 1996 da una caracterización de cuando el límite de funciones Henstock integrables sigue siendo integrable.

Teorema 44 (**Gordon**). *Sea $(f_n) \in \mathcal{H}(I)$ una sucesión de funciones cuyo límite puntual es f. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ y $\int_I f = \lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ tal que para toda $\dot{P} << \delta$ existe un $N_{\dot{P}} \in \mathbb{N}$ tal que $\left|S(f_n, \dot{P}) - \int_I f_n\right| < \epsilon$ si $n \geq N_{\dot{P}}$.*

Observación. En particular si la sucesión de funciones es equi-integrable tenemos que la función límite es integrable.

Demostración.

⇒) Dada $\epsilon > 0$, existe una $K = K_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$ entonces $\left|\int_I f - \int_I f_k\right| < \epsilon$. Como $f \in \mathcal{H}(I)$, existe una función $\delta : I \to \mathbb{R}^+$ tal que si $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición δ-fina, entonces $\left|\int_I f - S(f, \dot{P})\right| < \epsilon$. Como $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, existe $N_{\dot{P}} \geq K$ tal que si $k \geq N$ entonces $|f_k(t_i) - f(t_i)| < \epsilon$ para toda $i = 1, \cdots, n$. Así pues

$$\begin{aligned}\left|S(f_k, \dot{P}) - \int_I f_k\right| &\leq \left|S(f, \dot{P}) - \int_I f\right| + \left|\int_I f - \int_I f_k\right| + \left|S(f_k, \dot{P}) - S(f, \dot{P})\right|\\ &\leq 2\epsilon + \sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f_k(t_i)|\; l(I_i) \leq \epsilon(b - a + 2).\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Veamos que $\left(\int_I f_k\right)$ es de Cauchy. Dada $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ tal que para toda partición δ-fina, $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$, existe $K_P \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq K_P$ entonces $\left|S(f_k, \dot{P}) - \int_I f_k\right| < \epsilon$.
Por la convergencia puntual existe $K \geq K_P$ tal que $|f_k(t_i) - f_l(t_i)| < \epsilon$ siempre que $k, l \geq K$ y $i = 1, \cdots, n$. Entonces
$\left|S(f_k, \dot{P}) - S(f_l, \dot{P})\right| \leq \sum_{i=1}^n |f_k(t_i) - f_l(t_i)| \; l(I_i) < \epsilon(b-a)$.
Si l tiende a infinito obtenemos $\left|S(f, \dot{P}) - S(f_k, \dot{P})\right| \leq \epsilon(b-a)$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \left|\int_I f_k - \int_I f_l\right| &\leq \left|\int_I f_k - S(f_k, \dot{P})\right| + \left|S(f_k, \dot{P}) - S(f_l, \dot{P})\right| + \left|\int_I f_l - S(f_l, \dot{P})\right| \\ &\leq \epsilon(b-a+2). \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión es de Cauchy. Sea A el límite, entonces existe $N \geq K$ tal que si $k \geq N$ entonces $\left|\int_I f_k - A\right| < \epsilon$. Así pues

$$\begin{aligned} \left|S(f, \dot{P}) - A\right| &\leq \left|S(f, \dot{P}) - S(f_k, \dot{P})\right| + \left|\int_I f_k - S(f_k, \dot{P})\right| + \left|\int_I f_k - A\right| \\ &\leq \epsilon(3 + 2b - 2a) \end{aligned}$$

$\square$

Observación Todos los resultados de esta sección son ciertos si la convergencia es casi donde sea.

7. Integral de Henstock en intervalos no acotados

En esta última sección extendemos la definición de integral a intervalos no acotados. Se observará que la extensión de los resultados no tiene casi ningún problema en demostrar. Además se demuestra el teorema de Hake que nos garantiza cuando una función es integrable en intervalos no acotados en términos de la integrabilidad en intervalos acotados. Vamos a usar la convención $0 \cdot (\pm\infty) = 0 = (\pm\infty) \cdot 0$.

Definición 45. *Definimos una partición etiquetada de $[a, \infty]$ como*

$$\dot{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \cdots, ([x_n, x_{n+1}], t_{n+1})\}$$

Donde $x_0 = a$ y $x_{n+1} = \infty$. Dada $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ denotamos $f(\infty) = 0$.
Decimos que $\delta : [a, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función calibradora si es una función positiva.
Dada $t \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, denotamos $U(t, r) = [t - r, t + r]$, $U(\infty, r) = [r, \infty]$. Entonces decimos que $\dot{P}$ es δ-fina, denotada por $\dot{P} << \delta$, si $[x_{i-1}, x_i] \subset U(t_i, \delta(t_i))$ para toda $i = 1, \cdots, n+1$

Observemos que si $P << \delta$ entonces $t_{n+1} = \infty$, por lo que $S(f, \dot{P}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Teorema 46 (Cousin). *Sea $I = [a, \infty]$ y δ una función calibradora de I, entonces existe $\dot{P}$ una partición etiquetada, δ-fina.*

Demostración. Definimos $b = \max\{a, \delta(\infty)\}$, por el teorema de Cousin para intervalos compactos, existe una partición $\dot{Q}$, δ-fina en $[a, b]$. Entonces $\dot{P} = \dot{Q} \cup \{([b, \infty], \infty])\}$ es una partición δ-fina en I. □

Definición 47. *Sea $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$, (con $f(\infty) = 0$). Decimos que*

a) f es Henstock integrable si existe $c \in \mathbb{R}$ para la cual, dada $\epsilon > 0$ existe una función calibradora δ, tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces $|S(f, \dot{P}) - c| < \epsilon$.
A la integral la denotamos por $\int_a^\infty f$ y al conjunto de funciones Henstock integrables por $\mathcal{H}([a, \infty])$.

b) Decimos que f es absolutamente integrable si f y $|f| \in \mathcal{H}([a, \infty])$

Sin cambio alguno en la demostración, se sigue cumpliendo este teorema

Teorema 48. *Sea $I = [a, \infty]$ y $f : [a, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dados, entonces se cumple:*

*a) **Criterio de Cauchy:** $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe una función calibradora η tal que para cualesquiera dos particiones etiquetadas η finas $\dot{P}$ y $\dot{Q}$, se tiene que*

$$|S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q})| < \epsilon.$$

b) Si f es una función nula, entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ y $\int_I f = 0$.

c) Si f y g son integrables en I, entonces $f + g$ es integrable y $\int_I f + g = \int_I f + \int_I g$.

d) Si f es integrable y c es un número real, entonces cf es integrable y $\int_I cf = c \int_I f$.

e) Si $f \in \mathcal{H}(I)$ y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in I$, entonces $\int_I f \geq 0$.

f) Si $f,\ g \in \mathcal{H}(I)$ y $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in I$, entonces $\int_I f \leq \int_I g$.

g) Sea $f : [a, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, \infty)$. Entonces $f \in \mathcal{H}([a, \infty])$ si y sólo si $f \in \mathcal{H}([a, c])$ y $f \in \mathcal{H}([c, \infty])$. En tal caso $\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$.

El siguiente teorema es un resultado muy útil para demostrar si una función f definida en $[a, \infty]$ es Henstock integrable. Este teorema fue probado en 1921 por Heinrich Hake para la integral de Perron[8] y la siguiente prueba usa fuertemente el lema de Saks-Henstock. Sin embargo, el resultado correspondiente no se cumple para la integral de Lebesgue, por ejemplo

Ejemplo 49. *Si definimos $f : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) = \frac{sen(t)}{t}$ si $t \neq 0$ y $f(0) = 1$, entonces $\int_0^\infty |f| d\lambda = \infty$, por lo que $f \notin \mathcal{L}([0, \infty])$ pero $\pi/2 = \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f d\lambda$.*

[8] Para más información sobre la integral de Perron se puede consultar [5] o [8].

Teorema 50 (Hake). *Sea $I = [a, \infty]$ y $f : I \longrightarrow R$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si $f \in \mathcal{H}([a, c])$ para todo $c \in (a, \infty)$ y existe $\lim\limits_{c\to\infty} \int_a^c f = A$. En tal caso $\int_a^\infty f = A$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) f es integrable en cualquier intervalo compacto $[a, c]$ por el teorema anterior. Definimos $A := \int_a^\infty f$. Dada $\epsilon > 0$ existe una función calibradora η tal que si $\dot{P}\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n+1} << \eta$ entonces $|S(f, \dot{P}) - A| \leq \epsilon$.
Sea x_n el penúltimo punto de la partición y $c \geq x_n$. Entonces existe una función calibradora $\eta_c : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $\eta_c < \eta$) tal que si $\dot{P}_c << \eta_c$ entonces $\left|S(f, \dot{P}_c) - \int_a^c f\right| < \epsilon$.
Sea $\dot{P}_c^* = \dot{P}_c \cup \{([c, \infty], \infty)\}$ entonces

$$\left|\int_a^c f - A\right| \leq \left|\int_a^c f - S(f, \dot{P}_c)\right| + \left|S(f, \dot{P}_c^*) - A\right| < 2\epsilon.$$

$\Leftarrow$) Sea $(c_k)_{k=0}^\infty$ una sucesión creciente tal que $c_0 = a$ y $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$. Por la definición de límite dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $b \geq c_N$ entonces $\left|\int_a^b f - A\right| \leq \epsilon$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea δ_k una función calibradora en $I_k = [c_{k-1}, c_k]$ tal que

a) $\delta_1(c_0) \leq (c_1 - c_0)$.

b) $\delta_{k+1}(c_k) \leq \text{mín}\{\delta(c_k), \frac{1}{2}\, d(c_k, \{c_{k-1}, c_{k+}\})\}$ para toda $k \geq 1$.

c) $\delta_k(t) \leq \frac{1}{2}\, d(t, \{c_{k-1}, c_k\})$ para toda $t \in (c_{k-1}, c_k)$.

d) Si $\dot{P}_k$ es una partición δ_k-fina de I_k entonces

$$\left|S(f, \dot{P}_k) - \int_{I_k} f\right| < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Por los incisos *b*) y *c*) obligamos que los c_k sean etiquetas de las pareticiones P_k. Definimos $\delta : [a, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_k(t) & \text{si} \quad t \in [c_{k-1},\ c_k), k \in \mathbb{N} \\ \\ c_N & \text{si} \quad t = \infty \end{cases}$$

Sea $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ una partición δ-fina. Observemos que $t_{n+1} = \infty$ y $c_N \leq x_n$. Sea $s = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid x_n \leq c_k\}$ $(N \leq s)$, por el inciso c), c_k debe ser etiqueta de cada subintervalo que lo contenga para cada $k = 1, \cdots, s-1$, así pues, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_0, c_1, \cdots c_{s-1} \in \dot{P}$.
Definimos

$$\dot{Q}_k = \dot{P} \cap [c_{k-1}, c_k] \quad \text{para toda } k = 1, \cdots s-1.$$

$$\dot{Q}_s = \dot{P} \cap [c_{s-1}, x_n].$$

$$\dot{Q}_\infty = \dot{P} \cap [x_n, \infty].$$

Para cada $k \leq s-1$, se tiene que $\dot{Q}_k << \delta_k$, además como $\dot{Q}_s$ es una subpartición δ_s-fina por el teorema de Saks-Henstock obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|S(f,\dot{P})-A\right| &= \left|\sum_{k=1}^{s} S(f,\dot{Q}_k)+S(f,\dot{Q}_\infty)-A\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{s} S(f,\dot{Q}_k)-\int_a^{x_n} f\right| + |S(f,\dot{Q}_\infty)| + \left|\int_a^{x_n} f - A\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{s-1}\left|S(f,\dot{Q}_k)-\int_{c_{k-1}}^{c_k} f\right| + \left|S(f,\dot{Q}_s)-\int_{c_{s-1}}^{x_n} f\right| + \left|\int_a^{x_n} f - A\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{s}\frac{\epsilon}{2^k}+\epsilon \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Así pues, $f \in \mathcal{H}([a,\infty])$ y $\int_a^\infty f = A$.

□

Como corolario tenemos el siguiente criterio de Cauchy

Corolario 51. *Sea $f : I = [a,\infty] \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{H}([a,c])$ para toda $c \geq a$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $p, q \geq R$ se tiene que $|\int_p^q f| < \epsilon$.*

De manera análoga se puede definir la integrabilidad en el intervalo $[-\infty,\infty]$ y se tiene un teorema de Hake para este caso, el cual se deja al lector.

Teorema 52 (Hake)**.** *Sea $h : [-\infty,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. *$h \in \mathcal{H}([-\infty,\infty])$ con $\int_{-\infty}^{\infty} h = A$.*
2. *$h \in \mathcal{H}([a,b])$ para toda $a < b$ y $\lim\limits_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f = A$.*
3. *Para toda $c \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{H}([-\infty,c])$, $h \in \mathcal{H}([c,\infty])$ y $\int_{-\infty}^{c} f + \int_c^\infty f = A$.*

A continuación discutiremos cuáles resultados de las secciones anteriores siguen siendo válidos para intervalos no acotados. Para simplificar la notación, de ahora en adelante denotaremos por $I = [a,\infty]$ y $I_0 = [a,\infty)$.
El lema de Saks-Henstock es cierto para intervalos no acotados y se utiliza el teorema de Hake para su demostración.

Teorema 53 (**Lema de Saks-Henstock**)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(I)$, para $\epsilon > 0$ sea δ una función calibradora tal que si $\dot{P} << \delta$ entonces $|S(f,\dot{P}) - \int_I f| < \epsilon$.*
Si $\dot{P}_0 = \{(J_j,t_j)\}_{j=1}^s$ es una subpartición δ-fina se cumple que:

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\left(f(t_j)l(J_j)-\int_{J_j} f\right)\right| = \left|S(f,\dot{P}_o)-\int_{U(\dot{P}_0)} f\right| \leq \epsilon.$$

Demostración. Basta observar que la contribución de $\int_{x_n}^{\infty} f$ tiende a cero conforme x_n tiende a infinito por el teorema de Hake. $\square$

A continuación tenemos la generalización de los teoremas fundamentales para intervalos no acotados, nuevamente la prueba se basa en el teorema de Hake. Para esto debemos generalizar el concepto de continuidad en infinito, y el concepto de primitiva para el intervalo $[a, \infty]$.

Definición 54. *Decimos que $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en ∞ si $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) \in \mathbb{R}$.*

Definición 55. *Sean $f,\ F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Decimos que*

a) F es una primitiva de f en I si F es continua en I y $F\,'(x) = f(x)$ para toda $x \in I_0$.

b) F es una n-primitiva de f en I si F es ***continua*** *en I y existe un conjunto nulo $E \subset I_0$ tal que $F\,'(x) = f(x)$ para toda $x \in I_0 - E$.*

c) Definimos la integral indefinida de f con base en $u \in \mathbb{R}$ como $F_u(x) = \int_u^x f$.

Como se va a observar, la demostración es relativamente sencilla ya que se restringe f a intervalos acotados, se utiliza los teoremas fundamentales y después se lleva al límite gracias al teorema de Hake.

Teorema 56. *Si $f \in \mathcal{H}(I)$, $a < c < \infty$ y $\lim\limits_{x \to c+} f = A$ entonces $F_a(x)$ tiene derivada lateral derecha en c igual a A.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{H}([a, c+1])$ por el teorema 20 se cumple la conclusión. $\square$

Teorema 57. *Sea $f \in \mathcal{H}(I)$ y F una integral indefinida de f. Entonces F es continua y existe un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que si $x \in I - Z$ entonces F' existe y es igual a f. Es decir, F es una n-primitiva de f.*

Demostración. Por el teorema de Hake y el teorema 22, F es continua en $c \in I_0$, y $\lim\limits_{c \to \infty} F(c) = \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f = \int_a^{\infty} f$, por lo cual definiendo $F(\infty) = \int_a^{\infty} f$ resulta que F es continua en I.
Por el teorema 22, para cada $I_n = [a+n-1, a+n]$ existe un nulo Z_n tal que si $x \notin Z_n$ entonces $F\,'(x) = f(x)$.
De esta manera, $Z = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ es un nulo y si $x \notin Z$ entonces $F'(x) = f(x)$. $\square$

Teorema 58. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ tiene primitiva F en I entonces $f \in \mathcal{H}(I)$. Además $\int_a^{\infty} f = F(\infty) - F(a)$.*

Demostración. Ya que f tiene primitiva en cualquier compacto, $f \in \mathcal{H}([a, c])$ para toda $c > a$. Entonces por la continuidad de F

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f = \lim_{c \to \infty} F(c) - F(a) = F(\infty) - F(a).$$

El resultado se sigue del teorema de Hake. $\square$

Sin embargo, el teorema de convergencia uniforme ya no los podemos extender, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 59. *Definimos las siguentes funciones $f_n : [0,\infty] \longrightarrow \infty$ $f_n(x) = \frac{\chi_{[0,n]}(x)}{n}$. Es claro que las funciones convergen uniformemente a la función cero, pero*

$$\int_I 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Los teoremas de convergencia monótona, lema de Fatou, convergencia dominada y convergencia en media siguen siendo válidos para intervalos no acotados. Los últimos tres sólo utilizan el teorema de la convergencia monótona por lo que basta demostrar éste.

Teorema 60 (Convergencia monótona en intervalos no acotados.). *Sea (f_n) una sucesión monótona de funciones en $\mathcal{H}(I)$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces $f \in \mathcal{H}(I)$ si y sólo si la sucesión $(\int_I f_n)$ está acotada en $\mathbb{R}$. En cuyo caso se tiene que $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.*

Demostración. Supongamos que la sucesión es no decreciente, el otro caso es análogo.

$\Rightarrow$) Se sigue de la monotonía de la integral.

$\Leftarrow$) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f_k \geq 0$, si no reemplazamos f_k por $f_k - f_1$.
Sea $A = \sup\{\int_a^\infty f_n\}$, entonces la sucesión $\left(\int_a^\infty f_n\right)$ converge a A.
Para toda $c > a$, f es integrable en $[a,c]$ por el teorema de la convergencia monótona, además $\int_a^c f = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n$.
Haciendo uso del teorema de Hake y que $f_n \geq 0$ tenemos

$$\int_a^c f_n \leq \lim_{c\to\infty} \int_a^c f_n = \int_a^\infty f_n \leq A,$$

así pues,

$$\int_a^c f = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n \leq A.$$

Observemos que $f \geq 0$, entonces la función $c \mapsto \int_a^c f$ es creciente y por lo anterior acotada, por lo que converge a $\int_a^\infty f$. Por lo tanto

$$\int_a^\infty f = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f \leq A.$$

Dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A - \epsilon < \int_a^\infty f_N \leq A.$$

Por el teorema de Hake existe $c^* > a$ tal que para toda $c \geq c^*$

$$A - \epsilon \leq \int_a^c f_N \leq A.$$

Como $f_N \leq f$ se tiene que

$$A - \epsilon \leq \int_a^c f_N \leq \int_a^c f \leq A.$$

Así pues $\left|A - \int_a^c f\right| < \epsilon$ si $c \geq c^*$, por el teorema de Hake f es integrable en I y $A = \int_a^\infty f$.

$\square$

8. Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue estudiar la integral de Henstock. Se demostró el lema de Saks-Henstock que garantiza que tienen el mismo grado de aproximación, la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock de una función respecto a una partición y la diferencia entre la suma de Henstock y la integral de Henstock respecto a una subpartición. Y con esta herramienta se demostró que la integral de Henstock cumple con la idea original de Newton, es decir, la derivada de cualquier función se puede integrar.

Se mostró una generalización de los Teoremas Fundamentales del Cálculo, además se dió una caracterización de cuándo una función es Henstock integrable y a partir de ésta se demostró que todas las funciones Lebesgue integrables son Henstock integrables.
Además se estudió la convergencia de funciones Henstock integrables y se dió una caracterización para que el límite de funciones integrables sea Henstock integrable.

Se encontró que las funciones Lebesgue integrables son exactamente las funciones absolutamente Henstock integrables, además se mostraron ejemplos para la contención propia. Finalmente se extendió el concepto a intervalos no acotados y se demostró el teorema de Hake que garantiza la integrabilidad de una función en intervalos no acotados en términos de la integrabilidad en intervalos acotados.

El lector interesado puede estudiar los resultados en funciones con imagen en un espacio de Banach (ver [4]). Por otro lado, la generalización se puede dar en el dominio. Es bastante conocido y fácil de extender cuando éste es $\mathbb{R}^n$ (ver [5]), y se puede llevar hasta espacios métricos compactos (ver [7]).

Referencias

[1] R. G. Bartle. *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Editorial Board, 2001.

[2] R. G. Bartle. *Return to the Riemann integral*, American Mathematical Monthly. Vol 103 (1996) no. 8, pp. 625-632.

[3] D. L. Cohn. *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] D.H. Fremlin. *The Henstock and McShane integrals of vector-valued functions*, Illionois J. Math. Vol. 38 (1994), 471-479.

[5] R. A. Gordon. *The integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4, American Mathematical Society, Providense, (1994).

[6] R. A. Gordon. *The use of Tagged Partitions in Elementary Real Analysis*, American Mathematical Monthly. Vol. 105 (1998), no. 2, pp. 107-117.

[7] C. La Russa. *Henstock type integral for vector valued functions in a compact metric space*, Real Anal. Exchange. Vol. 36 (2010), no. 2, 4355-448.

[8] I. P. Natanson. *Theory of function of real variable* Vol 1, Frederick Ungar Publishing, New York (1967).

[9] E. J. McShane. *A Unified Theory or Integration* American Mathematical Monthly. Vol. 80 (1973), no 4. pp. 349-359.

[10] H.L. Royden. *Real Analysis*, Macmillan, 1998.

[11] R. Vyborny, L. P. Yee. *Integral: An easy approach after Kurzweil and Henstock* Cambridge University Press, United Kingdom, 2000.